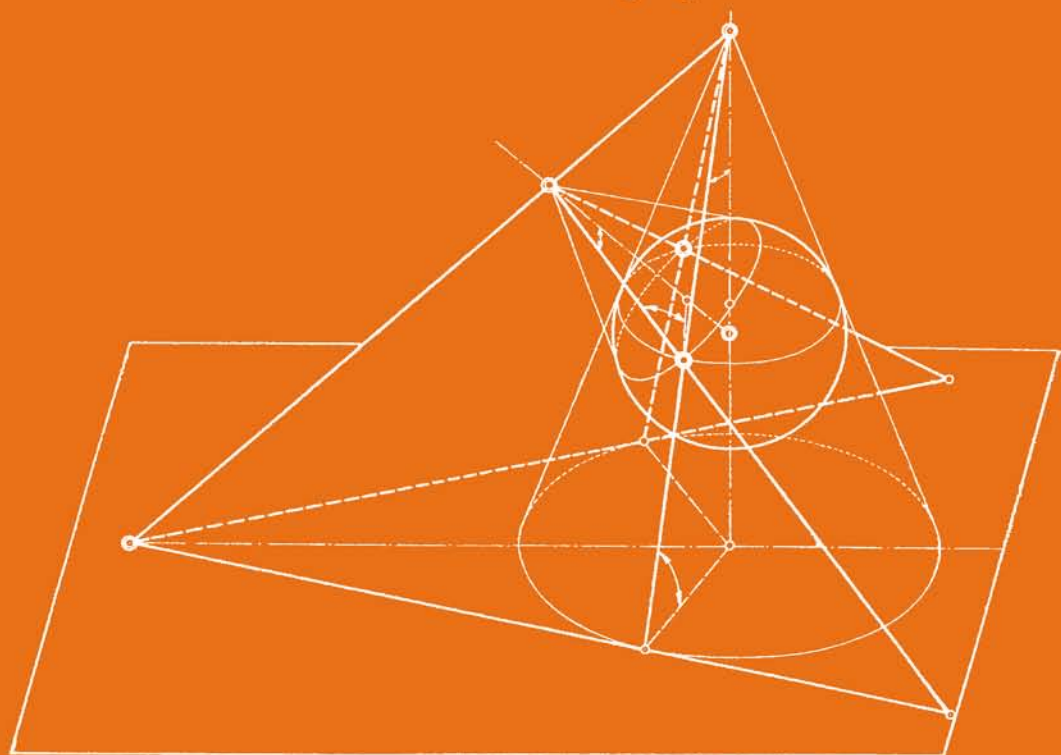


GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y SUS APLICACIONES

Tomo I
Punto, recta y plano



Ángel Taibo



GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y SUS APLICACIONES

**Tomo I
PUNTO, RECTA Y PLANO**

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y SUS APLICACIONES

Ángel Taibo Fernández

**Tomo I
PUNTO, RECTA Y PLANO**



Datos de catalogación bibliográfica:

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y SUS APLICACIONES

Tomo I: Punto, recta y plano

Ángel Taibo Fernández

EDITORIAL TÉBAR, S.L., Madrid, año 2009

ISBN Tomo I digital: 978-84-7360-434-5

Materias: 514.18 - Geometría descriptiva

Formato: 170 × 240 mm

Páginas: 310

www.editorialtebar.com

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con la autorización expresa de Editorial Tébar. La infracción de estos derechos puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y siguientes del Código Penal).

Geometría descriptiva y sus aplicaciones

Tomo I: Punto, recta y plano

2ª edición: Año 2010

© 2010 Editorial Tébar, S.L.

C/ de las Aguas, 4

28005 Madrid (España)

Tel.: 91 550 02 60

Fax: 91 550 02 61

pedidos@editorialtebar.com

www.editorialtebar.com

ISBN Tomo II digital: 978-84-7360-434-5

Diseño editorial: Rebeca Irazábal

Diseño de portada: FRIP

*En memoria de mi padre (q. e. p. d.) dedico
esta obra a mi buena madre, a quien todo lo debo.*

EL AUTOR

GRATITUD

AL dar cima con la publicación de este tratado de GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y SUS APLICACIONES a la mayor ilusión de mi vida, considero un deber el no silenciar los nombres de aquellos que, directa o indirectamente, me han permitido lograrla.

Al eminente cirujano, escritor y artista, el cultísimo Dr. D. Victoriano Juaristi, debo la orientación de mi vida, pues creyó ver en mis primeras manifestaciones de muchacho inquieto aptitudes para el dibujo, ordenó y dirigió mi tendencia profesional, fomentando siempre en mí el espíritu de emulación y la afición al estudio por su continuo ejemplo de hombre excepcional. Hoy me siento orgulloso de considerarme, más que amigo, obra suya. Al excelente Profesor de Dibujo, el escultor D. Julio Echeandía, quien con paciencia sin igual supo iniciarme acertadamente en la técnica del dibujo; sintiéndome honradísimo por haber sido uno de sus discípulos predilectos. A mi mejor amigo y compañero el Ingeniero industrial D. Luis Salis debo todas las facilidades que me han permitido estudiar la carrera de ingeniero industrial, desde sus comienzos. Hombre recto, inteligente e íntegro, de cuya bondad he recibido siempre los consejos y el aliento que como luchador he necesitado.

Y, concretando ahora, a los apoyos recibidos para la publicación de esta obra, figura en primer lugar: el ilustre colega de la cátedra de la Escuela de Ingenieros Industriales de Bilbao, D. Luis Ignacio de Arana; el prestigioso catedrático de la Escuela Superior de Arquitectura, Arquitecto e Ingeniero Industrial, D. César Cort; mi Auxiliar en la cátedra, el Profesor Ingeniero Industrial D. Juan Pradillo de Osma; mi compañero de promoción y estudios, el Ingeniero Industrial D. Enrique Laborde Werlinden, y mi bondadoso amigo D. Baltasar Márquez, con cuyas aportaciones he logrado salgan a la luz los Tomos I y II que hoy puedo ofrecer al mundo estudiantil.

En el Ilmo. Sr. D. Manuel Soto Redondo, Ingeniero Industrial, Director de nuestra Escuela, honra y gloria de nuestra clase, Presidente del Instituto Nacional de Ingenieros Civiles, he encontrado siempre el

calor del entusiasmo por mi obra y todas las soluciones a los conflictos que han surgido para realizar esta publicación. Por ello, además del afecto leal que por él siento, le destino un puesto de honor en mi gratitud.

Del dinamismo y del agudo espíritu de iniciativa y de clase, además de las muchas cualidades que personalizan al inteligente compañero, el ingeniero industrial D. José María Oriol, se ha logrado, con el eficacísimo apoyo del ya ponderado Director de mi Escuela, D. Manuel Soto, que se inicie la formación de un patronato que permita a nuestras Escuelas colmar sus nobles aspiraciones de aumentar nuestra riqueza científica mediante la publicación de libros de texto con la generosa aportación de la industria española.

Finalmente, agradezco a mis alumnos, especialmente a D. Manuel de La Fuente Duque y a D. Carlos Cambroneró, que tan eficazmente han colaborado conmigo en la corrección de las pruebas de imprenta y en la rotulación de las figuras.

Quiero, además, hacer resaltar la forma en que he podido llevar a cabo esta publicación, la cual revela una vez más el sano espíritu de compañerismo que nos une a los Ingenieros Industriales.

A los que aquí figuran y a todos aquellos en que ha encontrado una sincera acogida esta obra, mi profunda gratitud.

EL AUTOR

INTRODUCCIÓN

Desde el principio de su existencia, el hombre sintió la necesidad de plasmar sobre superficies planas formas corpóreas que le impresionaron por su belleza. Tal es el caso de las pinturas rupestres.

Cabe deducir de ello que, instintivamente, quería pasar del espacio de tres dimensiones en que se movía, al de dos, que le era más asequible.

Es indudable que la manera de conseguir un símbolo de una forma tridimensional con la máxima fidelidad y con el mejor efecto realista, consiste en ejecutar una reproducción también de tres dimensiones: la escultura es un ejemplo.

Sin embargo, esto es factible en un ámbito muy restringido, por la dificultad que supone el manejar adecuadamente las materias plásticas, principalmente consideradas como material científico y no artístico.

Así llegamos a dar un valor extraordinario al dibujo en todas sus manifestaciones.

Pero el dibujo en sí nada es, ni nada nos dice, si no efectuamos subconscientemente un esfuerzo imaginativo que nos relacione el plano con el espacio, y viceversa. Aquí interviene la Geometría Descriptiva, que dicta las leyes y establece las normas por las que:

Una forma concebida por una persona se transmite mediante el dibujo, con toda fidelidad, a otra, para su exacta asimilación.

Son dos, por tanto, las funciones de esta disciplina, inversa la una de la otra. Primera: representar sobre una superficie (generalmente plana) las formas concebidas. Segunda: reconstruir en la mente, o materialmente, las formas dadas mediante sus representaciones planas o dibujos.

Así como la escritura, la palabra, el pentagrama son elementos auxiliares insustituibles para poner al servicio del hombre su facultad creadora, el dibujo desempeña la misma función en el campo de la técnica y del arte.

Ahora bien: tales elementos requieren ser encauzados y dirigidos por su ciencia respectiva: la escritura y la palabra necesitan de la gramática; la música, de la armonía, de la composición, etc., y el dibujo, de la Geometría Descriptiva, que yo llamaría con más propiedad Geometría Representativa.

Pasando ahora a las aplicaciones directas de esta ciencia, y dejando a un lado su importantísima misión con respecto del dibujo, nos encontramos con un campo vastísimo que generalmente se desconoce como tal aplicación de la Geometría Descriptiva.

Por de pronto, todo lo que sea construcción, tanto con materiales pétreos como metálicos, entra directamente en el terreno de la Geometría Descriptiva, por conseguir formas y cuerpos de tres dimensiones nacidos de sus representaciones: los dibujos o los planos, abarcando así la importantísima rama llamada "Estereotomía de la piedra, de la madera y del hierro"; luego vienen las sombras, la teoría del claroscuro, la gnomónica, las perspectivas axonométrica y lineal o cónica, la escenografía, la cartografía, la fotogrametría terrestre y aérea con sus derivadas inmediatas la fototopografía y la estereofototopografía.

Además de esto, muchos profesionales recurren, sin advertirlo, a la Geometría Descriptiva como tal ciencia de representación: el radiólogo, con la radioscopía y la radiografía; el cirujano que localiza un cuerpo extraño o la zona a operar mediante dos o más radiografías; el protésico, que se auxilia de proyecciones, dibujos y secciones de los huesos, para su estudio y tratamiento; el sastre, que mediante sus plantillas transforma la tela plana en las prendas adecuadas; el alfarero, que con su primitivo torno de pie engendra superficies de revolución; el peón, que pasea la plantilla del perfil de una carretera sobre la masa de hormigón sin fraguar; el químico, que ordena a su mozo de laboratorio el montaje de un aparato cualquiera mediante un sencillo croquis; etc., etc.

Dado el contenido de esta obra, que como se aprecia es de alguna amplitud, queda dividida su publicación en tres tomos:

Tomo I. Punto, recta y plano.

Tomo II. Curvas y superficies.

Tomo III. Aplicaciones.

Al objeto de dar mayor conexión a la enseñanza de esta disciplina, y preocupado siempre de conseguir su máxima y más rápida asimilación por parte del alumno, plasmo en ella el resultado de mi larga vida profesional dedicada a ella, procurando ponerme, en lo posible, al nivel del estudiante, tanto en la forma expositiva como en los temas tratados. (Léase la justificación que aparece en el Tomo II, salido a la luz anteriormente a éste.)

En este primer tomo sigo el método de desarrollar conjuntamente los conocimientos relativos a los cuatro sistemas de representación que hoy se utilizan: acotado, diédrico, axonométrico y cónico.

Los problemas habrán de resolverse previamente siempre en el espacio, y habrán de ejecutarse en el mismo orden y con las mismas anotaciones todas las operaciones en el sistema donde se tengan representados los elementos que lo integran, pudiéndose considerar que dichas operaciones en

cualquiera de los sistemas son de carácter puramente mecánico, y debiendo tener presente siempre la figura del espacio donde originariamente quedó resuelto el mismo.

De esta forma, y de una manera insensible, se dominan los sistemas y se aprecia su utilidad práctica según la finalidad del problema a resolver, que, como en este tomo justifico, puede tener dos objetivos: uno, de medida y manejo de las formas del espacio, para lo cual se emplearán preferentemente los sistemas acotado y diédrico, que llamo sistemas de medida; otro, puramente representativo, donde se pretende dar la sensación del espacio con una sola proyección, naturalmente deformada, y que se adapta perfectamente a lo que en los sistemas axonométrico y cónico se explica, motivo por el cual llamo a estos sistemas: sistemas representativos, pudiendo notarse la diferencia, en su contra, al tener que operar en ellos para conseguir verdaderas dimensiones superficiales y lineales, y que por esta causa se desechan cuando se trata de conseguir formas del espacio dimensionadas.

En este tomo figuran con detalle los artificios necesarios: abatimientos, cambios, giros y traslaciones en los cuatro sistemas, y también he hecho intervenir, con miras a ulteriores aplicaciones, un interesante capítulo referente a los cambios de sistemas de representación, es decir, a obtener las proyecciones de una forma del espacio en un sistema distinto de aquel en que se nos determinó dicha forma.

Espero, por ello, que la presente obra tenga una acogida favorable entre todos aquellos que a su estudio se dedicaren.

EL AUTOR

SUMARIO

CAPITULO I

RELACIONES HOMOLOGICAS Y PROYECTIVAS

Homología. - Su aplicación al trazado de las cónicas. - Proyectividad. - Resumen de algunas propiedades proyectivas y su aplicación a la determinación de puntos y tangentes en las cónicas.

CAPITULO II

PRELIMINARES

La Geometría Descriptiva como ciencia de la representación. - Su finalidad en el campo de la técnica. - Los sistemas de representación. - Su definición y mecanismo.

CAPITULO III

SISTEMA ACOTADO

Representación y alfabeto del punto, de la recta y del plano.

CAPITULO IV

SISTEMA DIEDRICO

Representación y alfabeto del punto, de la recta y del plano.

CAPITULO V

SISTEMA AXONOMETRICO ISOMETRICO

Representación y alfabeto del punto, de la recta y del plano.

CAPITULO VI

SISTEMA CONICO

Representación y alfabeto del punto, de la recta y del plano.

CAPITULO VII

INTERSECCION DE PLANOS Y DE RECTAS Y PLANOS

Resolución en los cuatro sistemas de representación.

CAPITULO VIII

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

Paralelismo. - Rectas paralelas entre sí. - Planos paralelos entre sí. - Rectas y planos paralelos entre sí. — Perpendicularidad. — Recta perpendicular a un plano. - Plano perpendicular a una recta. - Planos perpendiculares entre sí. - Rectas perpendiculares entre sí. Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.

CAPITULO IX

DISTANCIAS

Medición de un segmento dado, en los cuatro sistemas de representación conocidos. Determinación de la distancia de un punto a un plano. - Distancia de un punto a una recta. Distancia entre dos rectas paralelas. - Distancia entre dos planos paralelos. - Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan.

CAPITULO X

ABATIMIENTOS

Abatimiento de un punto, de una recta y de un plano en los cuatro sistemas de representación. - Su aplicación a la resolución de problemas de verdaderas magnitudes lineales y superficiales, e inversos.

CAPITULO XI

CAMBIOS Y GIROS

Sistema acotado. - Cambio del plano de proyección. - Sistema diédrico: Cambio de los planos de proyección. - Sistema cónico: Cambio del plano del cuadro. - Cambio del plano geométral. - Cambio del punto de vista perpendicularmente al plano del cuadro y paralelamente a él. - Giros en el sistema diédrico. - Giro circular cuando el eje es perpendicular a un plano de proyección. - Giro circular cuando el eje es oblicuo. - Giro elíptico. - Problemas. - Traslaciones.

CAPITULO XII

TRIEDROS

Resolución del ángulo triedro en los seis casos.

CAPITULO XIII

CAMBIOS DE SISTEMAS DE REPRESENTACION

Paso del sistema acotado al diédrico. - Paso del sistema diédrico al axonométrico. Inverso. - Paso del sistema diédrico al cónico. - Inverso. - Aplicaciones.

CAPITULO I

RELACIONES HOMOLOGICAS Y PROYECTIVAS

Homología - Su aplicación al trazado de las cónicas - Proyectividad - Resumen de algunas propiedades proyectivas y su aplicación a la determinación de puntos y tangentes en las cónicas.

La circunferencia es una línea que interviene muy frecuentemente en los distintos cuerpos y superficies que se han de representar; por ello indico en este capítulo los procedimientos que nos conducen a manejar y trazar esta línea, que al ser proyectada viene transformada, en general, en una cónica.

Es de observar la extraordinaria sencillez con que se consigue la determinación de ejes, centro y vértices de las cónicas relacionándolas homológicamente con la circunferencia.

Doy por sabidas las principales propiedades de las curvas de segundo grado, así como la forma de manejar, en general, la homología, cuando el estudiante se enfrenta con esta disciplina de Geometría Descriptiva en la Escuela Especial.

Sin embargo, el que no tuviere conocimiento de esta importantísima teoría, encontrará en este capítulo cuantos elementos haya de utilizar en la resolución de las muy numerosas aplicaciones que de ella hago a lo largo de este tratado.

También se verá que interviene frecuentemente la homología, si bien no relacionada con el manejo de las curvas de segundo grado, siendo por ello fundamentalmente útil el estudio y conocimiento del presente capítulo.

Consideraré como conseguido el fin propuesto, cuando se tenga definido el sistema de homología que me relacione la cónica a trazar con una circunferencia, pues el conocimiento de tal sistema proporcionará la determinación rápida del centro, ejes y vértices de la cónica en cuestión, imprescindibles a un trazado correcto, necesitando para ello la obtención previa de dos diámetros conjugados de la misma.

Quien haya de dibujar una cónica, no solamente debe conocer sus ejes, sino saberla trazar con la mayor exactitud posible, para lo cual, una vez conseguidos éstos, indico en la figura 30 de este capítulo la

forma práctica de realizar dicho trazado con la precisión requerida por la finalidad de la representación gráfica; aun si, por fortuna, estuvieren al alcance compases especiales para el trazado de cónicas, también se precisará el conocimiento de dichos ejes, pero el empleo de éstos no es frecuente.

Las relaciones proyectivas también nos conducen al mismo resultado; pero valorando la importancia de la exactitud y de la rapidez en el trazado, veremos que la ventaja está siempre del lado de la homología, motivo por el cual insisto en que se utilice esta importantísima teoría, que, como veremos más adelante, es aplicable a todos los casos de determinación de cónicas, cuando se conocen sus cinco elementos integrantes.

HOMOLOGIA PLANA - DEFINICION

Figura 1. Se dice que dos figuras situadas en un mismo plano A, B, C, D, E, F , y A', B', C', D', E', F' son homológicas, cuando se corresponden punto a punto y recta a recta, de tal forma que:

Primero. Los puntos homólogos tales que $A-A', B-B'$, etc., se hallan siempre en línea recta con un punto fijo O llamado *centro de homología*.

Segundo. Que dos rectas homólogas tales como $\overline{B-D}$ y $\overline{B'-D'}$, $\overline{B-E}$ y $\overline{B'-E'}$, $\overline{E-D}$ y $\overline{E'-D'}$, etc. se cortan en puntos a, b, c, \dots de una recta fija llamada *eje de homología*.

Los puntos del eje son dobles; es decir, que son homólogos de sí mismos, y entonces a se confunde con a' , b con b' , c con c' , etc.

Asimismo, las rectas de unión de puntos homólogos, por ejemplo, $\overline{A-A'-O}$, $\overline{B-B'-O}$, etc., son rectas dobles.

Esto nos dice que todos los puntos de una recta $\overline{D-E}$, por ejemplo, tienen sus homólogos en su recta homóloga $\overline{D'-E'}$, como sucede con el punto $H-H'$ (en línea recta con O).

Por esta razón, el punto impropio M_∞ de $\overline{D-E}$ tendrá por homólogo el punto M' de su homóloga $\overline{D'-E'}$ resultante de trazar por O el rayo proyectante $\overline{O-M_\infty}$ paralelo a la recta $\overline{E-D}$.

Si de la misma forma hallamos el punto N' homólogo de N_∞ de la recta $\overline{B-E}$, al unirlo con M' habremos conseguido una recta $\overline{N'-M'}$, llamada *recta límite* L' , paralela al eje de homología E , lugar geométrico de los puntos homólogos de todos los puntos impropios pertenecientes al sistema de la figura A, B, C, D, E, F .

Siendo además reversible la propiedad homológica, vemos que la

obtención del punto P , homólogo del P'_∞ de la recta $\overline{B'E'}$, se conseguirá en forma análoga; es decir, hallando el punto de la recta $\overline{B-E}$ situada en el rayo $O-P'_\infty$; el lugar geométrico de los puntos homólogos de los impropios del sistema A', B', C' , etc., será otra recta límite L , también paralela al eje de homología.

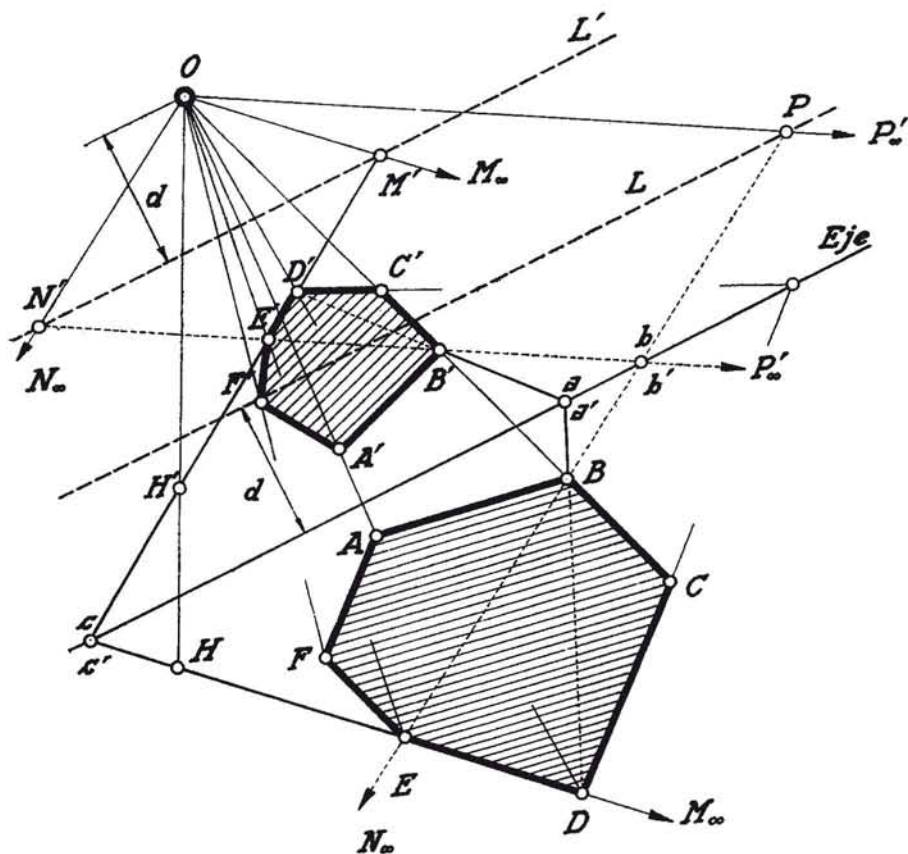


Fig. 1. — Homología plana.

Esto nos indica que existe una relación doble entre todos los puntos del plano que contiene a las dos figuras, relación que viene expresada por el sistema de homología, planteado de tal manera que a cada punto de dicho plano corresponde otro punto del mismo, y que los puntos impropios se corresponden en la otra figura hallándose situados en su respectiva recta límite.

Estas dos rectas límites están situadas equidistantes del eje y del

centro de homología, hallándose comprendidas por estos dos elementos (fig. 2), o bien siendo las dos exteriores a ellos (fig. 3).

Como consecuencia vemos que si está dada y trazada una figu-

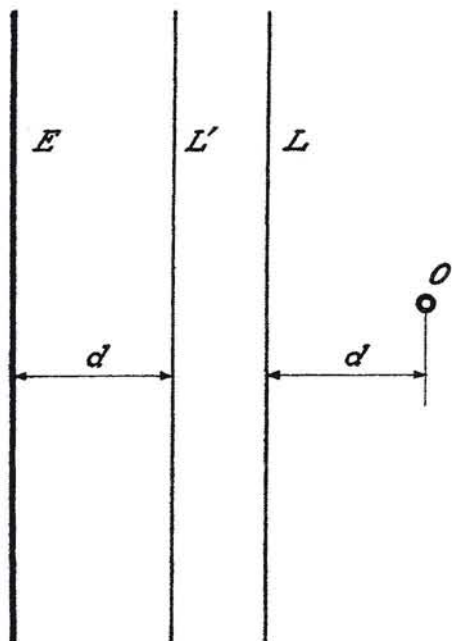


Fig. 2.—Posición relativa de los elementos determinativos $E-L'-L-O$.

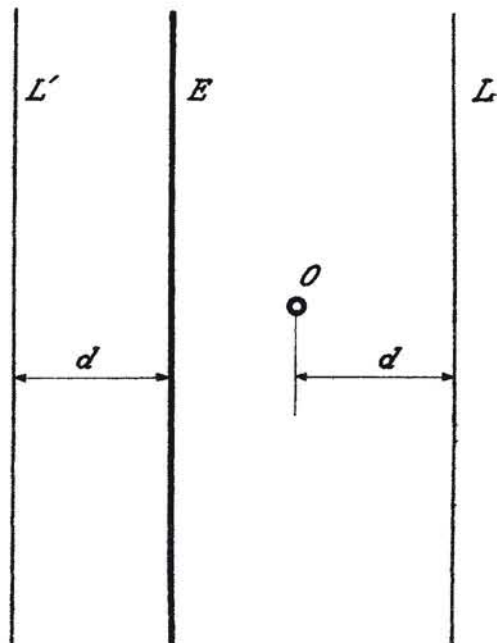


Fig. 3. — Posición relativa de los elementos determinativos $L'-E-O-L$.

ra plana F , podemos construir otra F' que está relacionada con ella cuando conozcamos los elementos determinativos del sistema de homología, por el que dependan la una de la otra, y viceversa se puede trazar F' cuando conozcamos F .

DETERMINACION DEL SISTEMA DE HOMOLOGIA

En vista de las anteriores propiedades, para que un sistema de homología esté determinado, necesitamos en general tres

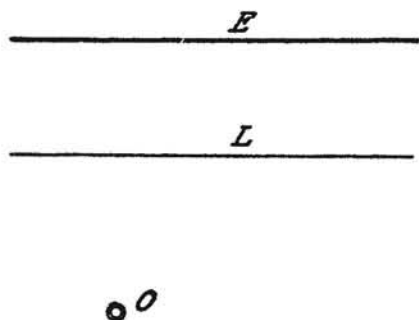


Fig. 4. — Sistema de homología determinado por $E-L-O$.

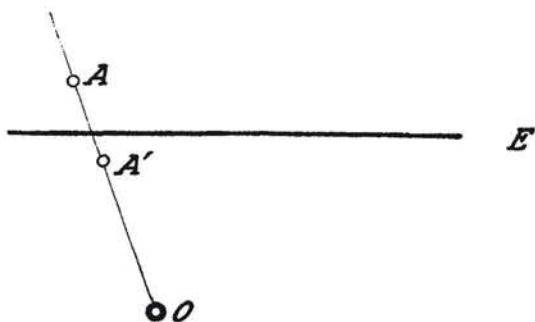


Fig. 5. — Sistema de homología determinado por $A-A'$, E y O .

elementos que se ponen de manifiesto en las figuras siguientes:

Figura 4. Eje, centro y una recta límite.

Figura 5. Eje, centro y un par de puntos homólogos $A-A'$.

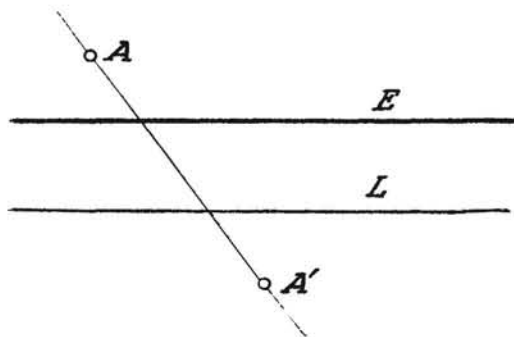


Fig. 6. — Sistema de homología determinado por $A-A'$, E y L .

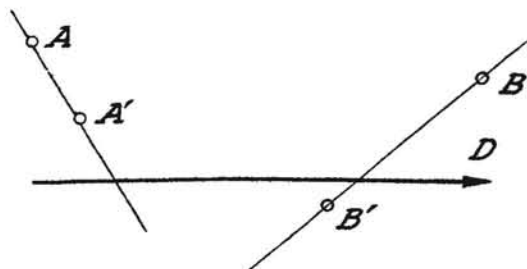
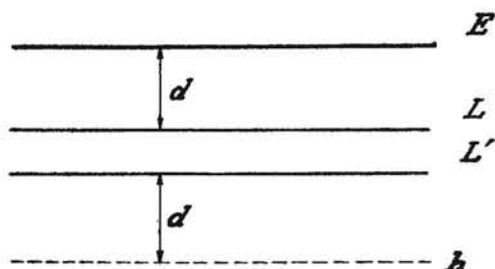


Fig. 7. — Sistema de homología determinado por $A-A'$, $B-B'$ y D , dirección del eje.

Figura 6. Eje, recta límite y un par de puntos homólogos $A-A'$.

Figura 7. Dos pares de puntos homólogos $A-A'$, $B-B'$ y la dirección D del eje de homología.

En la figura 8, en que se conocen las dos rectas límites $L-L'$ y el eje E , no queda por sí sólo determinado el sistema, puesto que el centro de homología puede ser un punto cualquiera de la recta h , paralela a las anteriores, trazada a una distancia conveniente d , según la propiedad puesta de manifiesto en las figuras 2 y 3.



PROPIEDADES FUNDAMENTALES

Fig. 8. — Sistema de homología indeterminado, aun conociendo tres elementos: $E-L-L'$.

Cuando tratemos de obtener una cónica en función de otra (una circunferencia), habremos de observar las siguientes particularidades que siempre se verifican en toda relación de este género.

1.º (Fig. 9.) Si una cónica C es homológica de una circunferencia C' , las tangentes comunes T_1, T_2 pasan por el centro de homología O , y por tanto son rectas dobles, $T_1-T'_1$ y $T_2-T'_2$, según ya hemos visto; entonces el punto A tendrá su homólogo en la circunfe-

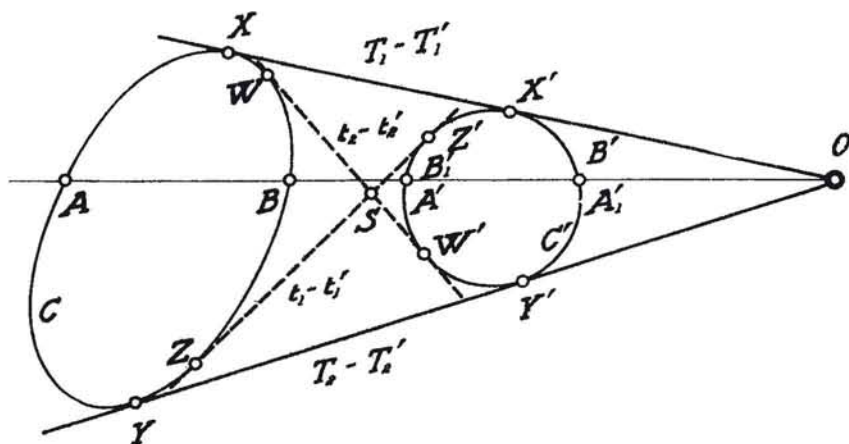


Fig. 9. — Las tangentes comunes a dos cónicas homológicas pasan por el centro de homología.

rencia y en línea recta con O ; es decir, podrá ser A' o A'_1 . En igual forma, el punto B podrá tener por homólogo el B' o el B'_1 . Como consecuencia de ser dobles las tangentes anteriormente citadas, serán homológicos los puntos de contacto; es decir, X homológico X' , e Y homólogo de Y' .

Las mismas consideraciones podemos hacer tomando por centro

de homología el punto S , y entonces las tangentes interiores t_1 y t_2 serán dobles; es decir, serán también t'_1 y t'_2 respectivamente, correspondiéndose los puntos de contacto $Z-Z'$ y $W-W'$.

2.º (Fig. 10.) Si una cónica C es homológica de una circunferencia C' que tiene con ella dos puntos comunes, se podrá tomar como eje de homología la cuerda común $A-B$, $A'-B'$, como se desprende de la definición de *eje de homología* de ser el lugar geométrico de los puntos dobles de las dos figuras.

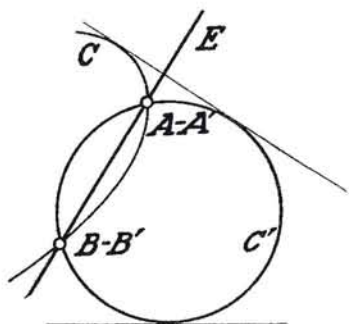


Fig. 10. — La cuerda común a dos cónicas homológicas determina su eje de homología.

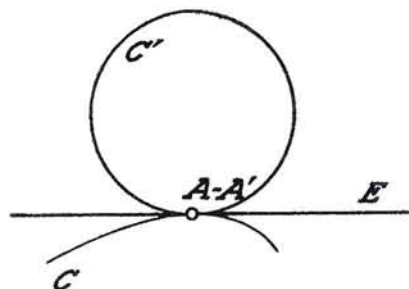


Fig. 11. — La tangente común a dos cónicas homológicas se puede tomar como eje de homología.

3.º (Fig. 11.) Cuando la cónica C y la circunferencia C' sean tangentes, podremos tomar como *eje de homología* la *tangente común* a ambas, pues se puede considerar este caso como límite del anterior, en que la cuerda común es un elemento rectilíneo situado en las dos curvas. El punto de contacto $A-A'$ será el único doble común a ambas líneas.

4.º Las relaciones entre *polo* y *polar* en la circunferencia se transforman, por homología, en sus correspondientes de *polo* y *polar* en las cónicas obtenidas. Es de observar que el polo p de una recta límite L de la cónica C tiene, al transformarse homológicamente, como punto correspondiente p' , centro de la cónica C' , por ser polo de la recta impropia.

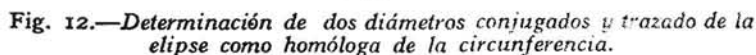
TRANSFORMACION HOMOLOGICA DE LA CIRCUNFERENCIA

Primer caso. (Fig. 12.) Al transformarse una circunferencia C homológicamente, cuando su *recta límite* L es exterior, se obtiene una *elipse*.

En efecto: ya hemos visto que la recta límite es el lugar geométrico de los puntos homólogos de los impropios de la otra figura.

Por tanto, al no tener ningún punto común la circunferencia con su recta límite, la curva transformada carece de puntos impropios y por tanto es una curva de segundo grado cerrada; es decir, una *elipse*.

Desde el punto B de encuentro de $1-2$ con la misma recta límite L , trazamos las tangentes T_3 y T_4 , con lo que habremos logrado el triángulo autopolar $\overline{A-B-D}$. Es indudable que las rectas T'_1 , T'_2 y la recta $3'-D'-4'$ tendrán común el punto homólogo de A ; es decir, el punto A'_∞ que se obtiene uniendo A con O , centro de homología. Como además los puntos del eje son dobles, quedarán perfectamente definidas



Conseguidos los dos diámetros conjugados $\overline{1'-2'}$ y $\overline{3'-4'}$, se puede

Segundo caso. (Fig. 13.) La circunferencia se transforma en *parábola* cuando su recta límite L le es tangente.

Determinación de la parábola. — El sistema de homología está definido por: el eje E , la recta límite L , tangente a la circunferencia C , y el centro de homología O . Siendo A el punto de contacto de la recta límite con la circunferencia, la recta $O-A$ nos da la dirección del punto impropio de la parábola A'_∞ , es decir, de su eje.

La determinación del vértice de la parábola y, por consiguiente, de su eje, se consigue mediante el artificio de trazar a la cónica homológica C' la tangente perpendicular a su eje, cuya dirección $\overline{O-A'_\infty}$ conocemos. Para ello tracemos la recta $\overline{O-B}$ perpendicular a la dirección del eje $\overline{O-A'_\infty} = \overline{O-A}$, y desde B la tangente T_V a la circunferencia, obteniéndose el punto de contacto V . Su homóloga T'_V pasará por el punto doble del eje $a-a'$ y será paralela a $\overline{O-B}$. Trazada T'_V , en ella se encontrará V' , vértice de la parábola al unir $\overline{V-O}$. Bastará trazar $\overline{V'-A'_\infty}$ para tener el eje de la parábola.

Fig. 13. — *Determinación del vértice y del eje de una parábola homóloga de la circunferencia.*

tricos de b' y c' , respectivamente. La determinación del punto-de contacto de la tangente doble $T-T'$ se obtiene sencillamente uniendo dos puntos de la misma figura $A-1$ y hallando la homóloga de esta recta $1'-A'_\infty$.

Tercer caso. (Fig. 14.) Cuando la recta límite corta a la circunferencia, su transformada homológica es una hipérbola.

En efecto: la cónica tiene dos puntos impropios y, por tanto, es hipérbola.

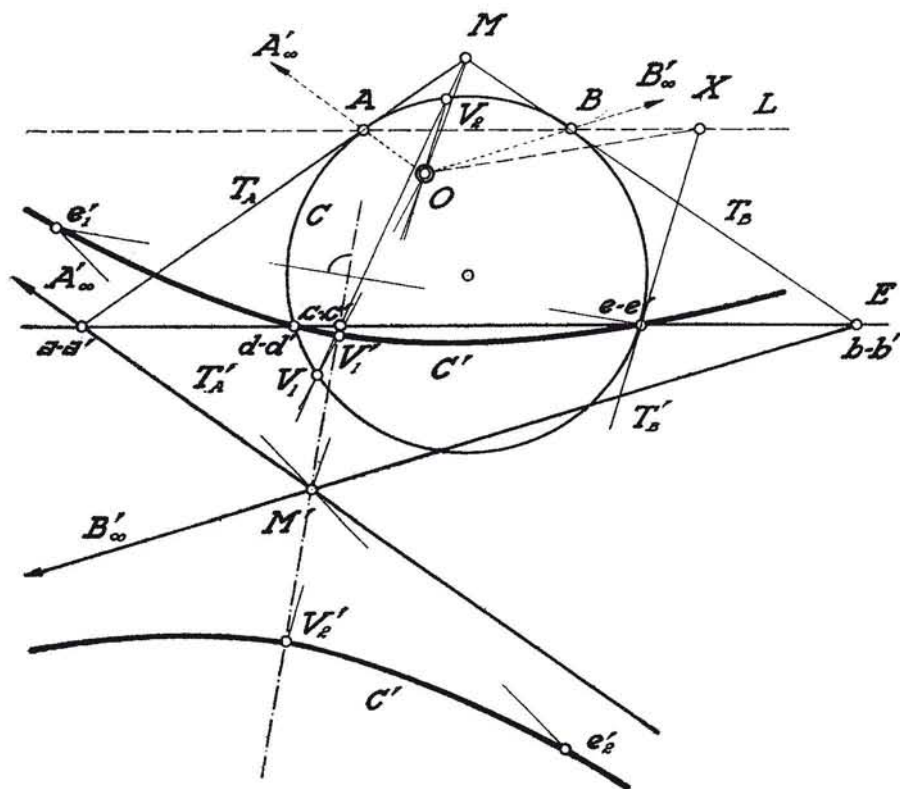


Fig. 14. — Determinación de las asíntotas y vértices de una hipérbola, homológica de una circunferencia.

Determinación de la hipérbola. El sistema de homología está planteado así:

Eje de homología: E .

Recta límite del sistema circunferencia C : L .

Centro de homología: O .

Se determinan los elementos de la hipérbola resultante teniendo presente que los puntos A y B en que la recta límite L corta a la circunferencia C , tienen por homólogos los A'_∞ y B'_∞ ; es decir, que al trazar las rectas $O-A$ y $O-B$ obtenemos las direcciones de las dos asínto-

tas, las cuales serán las rectas homólogas de las tangentes $T_A—T_B$, y se conseguirán muy sencillamente trazando por los puntos $a—a'$ y $b—b'$ en que cortan al eje de homología, las T'_A y T'_B , respectivamente, paralelas a $O—A$ y $O—B$.

El punto M' , centro de la hipérbola, será el homólogo de M , en que se cortan las tangentes T_A y T_B , y esto nos sirve de comprobación.

Para determinar los vértices V'_1 y V'_2 de la hipérbola, bastará que hallemos el homólogo de su eje real: $\overline{M'—c'}$, bisectriz del ángulo formado por las asíntotas, que será la recta $c—M$, la cual corta a la circunferencia en los puntos V_1 y V_2 que, unidos con el centro de homología O , nos determinan dichos vértices V'_1 y V'_2 , respectivamente.

También pertenecerán a la hipérbola los puntos dobles del eje: $d—d'$ y $e—e'$; por simetría, e' nos proporciona e'_1 y e'_2 .

RESUMEN

Como resumen de las tres construcciones anteriormente estudiadas, vemos que con el conocimiento de las relaciones homológicas existentes entre una cónica y una circunferencia convenientemente elegida, conseguimos: 1.º, dos diámetros conjugados para la elipse, de donde se deducirán sus ejes; 2.º, para la parábola, su eje y su vértice; y 3.º, para la hipérbola, sus asíntotas y sus vértices, y en todos los casos, tantos puntos aislados con sus tangentes como se precisan, de una manera sencilla y exacta, con lo cual podemos trazar la cónica con la exactitud que exija la precisión del trazado a que se destine.

LAS CONICAS COMO HOMOLOGAS DE LA CIRCUNFERENCIA

La circunstancia que frecuentemente se presenta es la de la cónica determinada por cinco elementos, cualesquiera que éstos sean. Estos casos son 12, resumidos en el cuadro siguiente, los cuales vamos a resolver empleando las relaciones homológicas ya expuestas, utilizando los artificios convenientes para determinar en cada uno de ellos el sistema de homología que nos permita, además de averiguar la naturaleza de

la cónica, obtener los elementos necesarios a su trazado, como indicamos más arriba, al transformar la circunferencia. (Figs. 12, 13 y 14.)

Caso	Puntos ordinarios	Puntos de tangencia	Tangentes
1	5	0	0
2	4	0	1
3	3	1	1
4	3	0	2
5	2	1	2
6	1	2	2
7	2	0	3
8	1	1	3
9	0	2	3
10	1	0	4
11	0	1	4
12	0	0	5

Primer caso. (Fig. 15.) La cónica está definida por cinco puntos. Los puntos dados son A, B, C, D y E . Tracemos una circunferencia c' que pase por $\overline{E-D}$, con lo que la cuerda común $\overline{E-D}$ será el eje de homología (fig. 10), y los puntos E y D dobles, o sea confundidos con sus homólogos E' y D' . Esta circunferencia c' de centro o' se ha trazado teniendo por diámetro la cuerda $\overline{E'-D'}$.

Para la determinación del sistema homológico que define la cónica buscada c en función de c' , emplearemos el siguiente artificio:

Prolongada la cuerda $\overline{B-C}$ hasta su punto del eje $\overline{P-P'}$, hallaremos la polar de este punto doble en las dos cónicas. La polar p' en la circunferencia se obtendrá uniendo los puntos de contacto de las tangentes t'_1 y t'_2 trazadas desde P , y será la cuerda $\overline{1'-a'-2'}$. La polar p

de P con respecto a la cónica c que se trata de hallar, pasará por $a-a'$, que es punto doble por ser del eje y, por definición, por el punto X conjugado armónico de P con respecto a B y C , que obtendremos mediante un sencillo cuadrilátero completo, no representado en la figura para no complicarla.

De la misma manera, prolongada la cuerda $B-A$ hasta su punto de encuentro $R-R'$ con el eje de homología, hallaremos de la misma

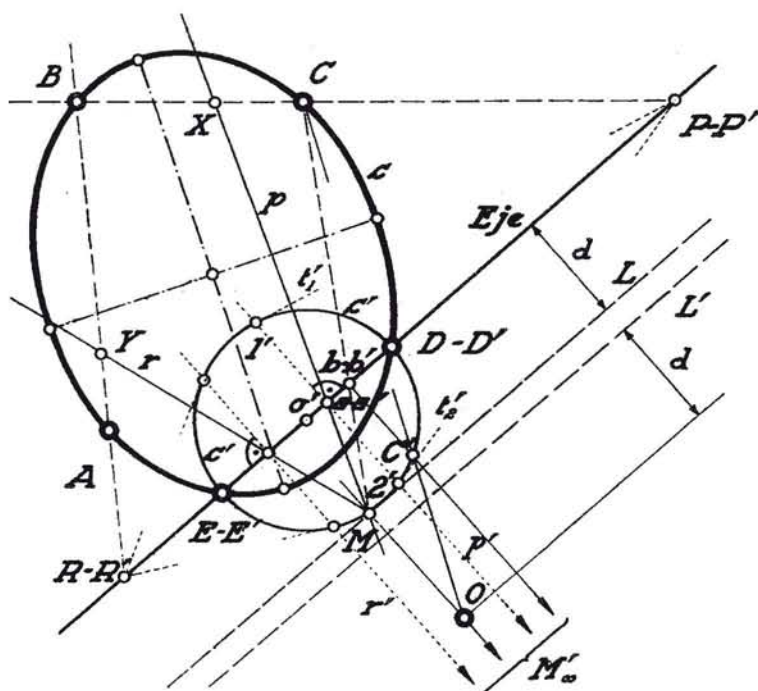


Fig. 15. — Primer caso: Transformación homológica de una cónica dada por cinco puntos.

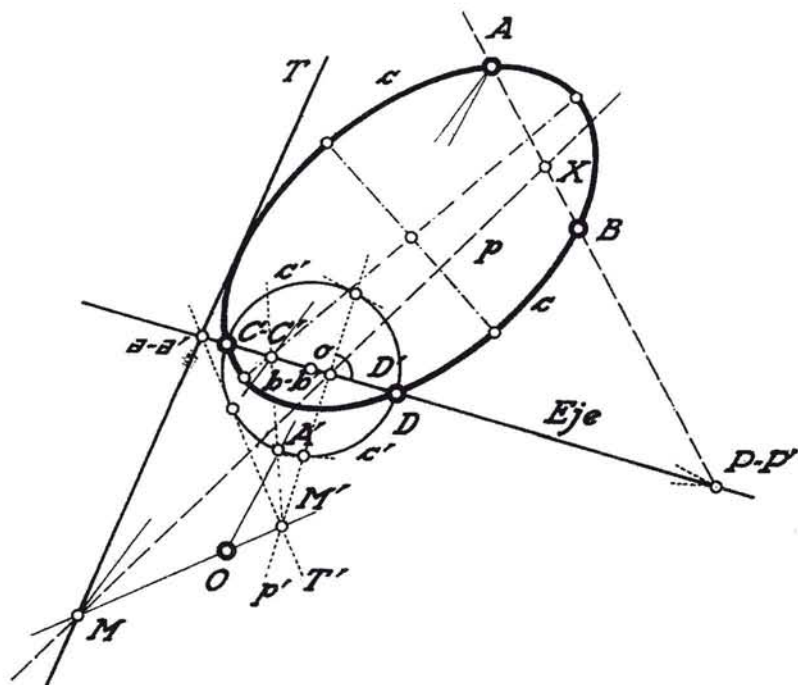
forma las polares r y r' del punto doble $R-R'$. El punto Y es conjugado armónico de R con respecto de A y B .

El punto de encuentro M de las polares p y r tendrá como homólogo el punto común de p' y r' , que será el punto M'_∞ , por ser paralelas p' y r' . Por tanto, el centro O se hallará sobre la recta $M-M'_\infty$.

Del sistema de homología sólo tenemos ahora el eje y un par de puntos homólogos $M-M'_\infty$. Necesitamos otro par de puntos. Para obtenerlo, uniremos M con C , por ejemplo, y hallaremos C' , situado en la circunferencia y sobre la recta $b'-M'_\infty$, C' , unido con C , nos da también la dirección del centro de homología O , que queda así definido.

El haber elegido $E'-D'$ como diámetro de la circunferencia arbi-

Segundo caso. (Fig. 16.) Los puntos dados son los A, B, C, D y la tangente T .



Empezaremos por elegir como eje de homología la cuerda común $\overline{C-D}$ y trazaremos una circunferencia c' que la contenga. En este caso, y sin que ello suponga particularidad alguna, $\overline{C'-D'}$ se ha tomado como diámetro.

La tangente T tendrá como homóloga la T' , que será tangente a la circunferencia y pasará por el punto $a-a'$ del eje.

Las rectas del sistema cónica p y T se cortan en el punto M , que tendrá como homólogo el punto M' de intersección de las rectas p' y T' .

Por otro lado, la recta $\overline{M-b-A}$ tendrá por homóloga $\overline{M'-b'}$, determinándose así el punto A' de la circunferencia homóloga de A .

Al unir $\overline{A-A'}$ y $\overline{M-M'}$, pares de puntos homólogos, obtenemos el centro de homología O , que ya nos permitirá resolver la cónica según sabemos.

Tercer caso. (Fig. 17.) Tres puntos ordinarios, una tangente y su punto de contacto.

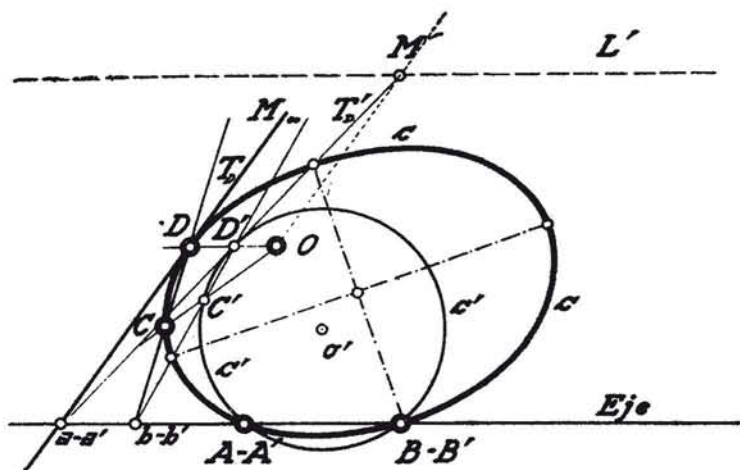


Fig. 17. — Tercer caso: Transformación homológica de una cónica dada por tres puntos ordinarios, una tangente y su punto de contacto.

Los puntos dados son $A-B-C$, la tangente T_D y D , su punto de contacto.

Elegiremos como eje de homología la cuerda común $\overline{A-B}$, y trazaremos la circunferencia c' de centro o' .

Obtenida la tangente T'_D , homóloga de T_D , desde $a-a'$, punto doble del eje, conseguimos D' , homólogo de D .

La cuerda $\overline{D-C-b}$ tiene por homóloga $\overline{b'-D'}$, consiguiendo así el punto C' , homólogo de C , con lo cual obtenemos el centro de homología O , que nos permite hallar el punto M' , homólogo de M_∞ y, por tanto, un punto de la recta límite L' del sistema circunferencia, quedando así definido el sistema que vemos nos da por homóloga de la circunferencia, una elipse, que ya sabemos determinar.

Cuarto caso. (Fig. 18.) Tres puntos ordinarios y dos tangentes. Los puntos dados son A, B, C y las tangentes T_1, T_2 .

Tomemos como centro de homología el punto O común a las tangentes T_1 y T_2 , y tracemos una circunferencia cualquiera c' de centro o' que tenga las mismas tangentes dadas, con lo que habremos conseguido sean éstas dobles T'_1 y T'_2 , respectivamente. Siendo O el cen-

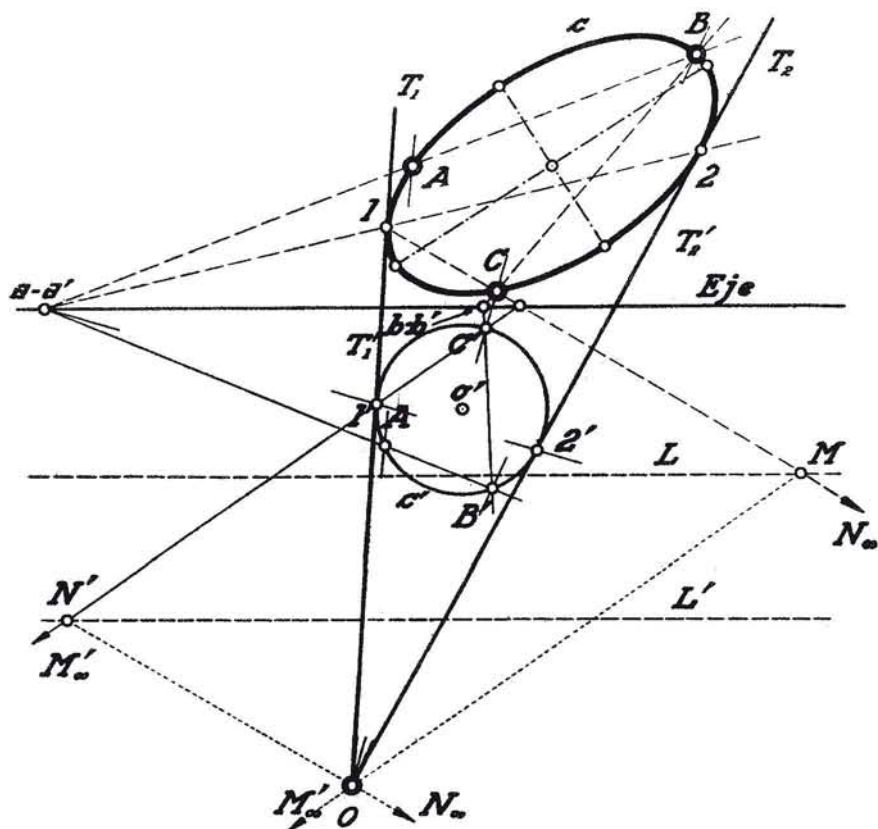


Fig. 18. — Cuarto caso: Transformación homológica de una cónica dada por tres puntos ordinarios y dos tangentes.

tro, inmediatamente al unirlo con A, B, C obtenemos sus homólogos A', B', C' que nos permitirán la obtención del eje de homología uniendo los puntos de encuentro $a-a'$ y $b-b'$ de las cuerdas $\overline{A-B}$ y $\overline{B-C}$ con sus homólogas $\overline{A'-B'}$ y $\overline{B'-C'}$, respectivamente.

Las rectas límites se consiguen con los puntos M , homólogo de M'_∞ , para L , y N' , homólogo de N_∞ , para L' . Esta última también nos indica que la cónica propuesta es una *elipse*.

La cuerda $\overline{1'-2'}$ de unión de los puntos de contacto de las tangen-

tes a la circunferencia nos da los puntos 1 y 2, que serán los de tangencia de las tangentes dadas T_1 y T_2 con la cónica en cuestión.

Nota: Por coincidencia fortuita, dicha cuerda $\overline{1'-2'}$ corta el eje en el mismo punto $a-a'$ en que lo hacen las cuerdas $\overline{A-B}$, $\overline{A'-B'}$.

Quinto caso. (Fig. 19.) Dos puntos ordinarios, dos tangentes y un punto de contacto.

Los datos son los puntos $A-B$, las tangentes T y T_c y el punto de contacto C .

Tomemos como centro de homología el punto de encuentro O de las dos tangentes T y T_c . Tracemos una circunferencia c' de centro o' , del que conseguiremos el punto C' . Tam-

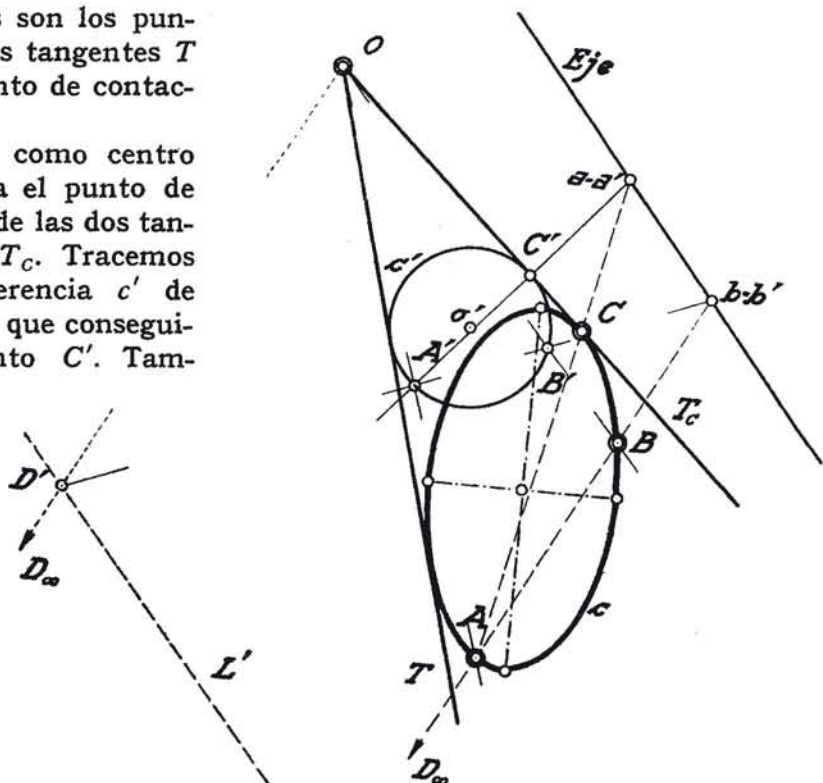


Fig. 19. — Quinto caso: Transformación homológica de una cónica dada por dos puntos ordinarios, dos tangentes y el punto de contacto de una de ellas.

bién hallaremos directamente el punto A' , homólogo de A y B' , homólogo de B al unirlos con el centro de homología O .

El eje de homología se obtendrá conociendo los puntos dobles $a-a'$ y $b-b'$, comunes a las cuerdas homólogas $\overline{A-C}$, $\overline{A'-C'}$ y $\overline{A-B}$, $\overline{A'-B'}$, respectivamente.

El punto D' , homólogo de D_∞ , nos da un punto de la recta límite L' del sistema circunferencia c' que, al no cortarla, nos dará como transformada la elipse dibujada c .

Sexto caso. (Fig. 20.) La cónica está definida por un punto, dos tangentes y sus dos puntos de contacto.

Los datos son el punto A , las tangentes T_B y T_C , así como sus puntos de contacto B y C , respectivamente.

Tomemos como centro de homología el punto O común a las dos tangentes T_B y T_C , y tracemos una circunferencia c' de centro o' inscrita en el ángulo T_B-T_C .

Los puntos de contacto B' y C' serán los homólogos de los dados $B-C$.

El eje de homología se logra con el conocimiento de los puntos

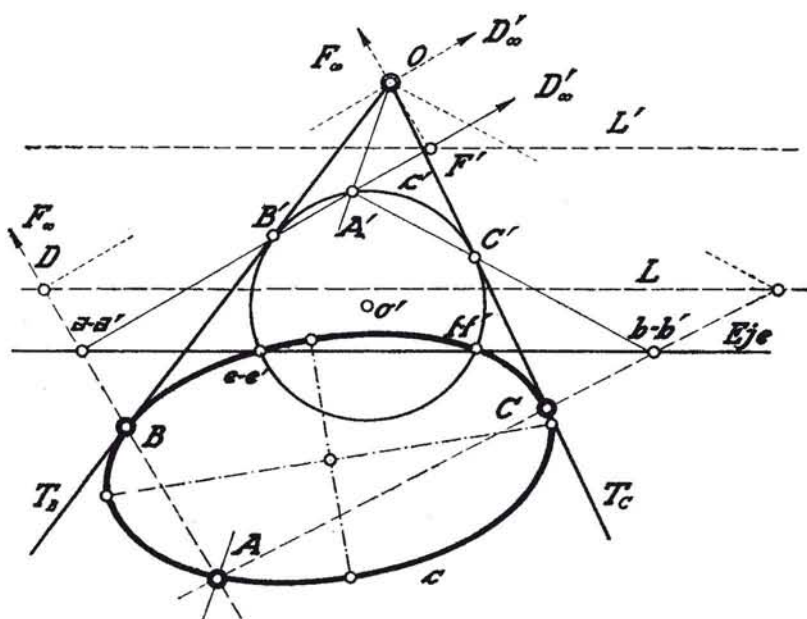


Fig. 20. — Sexto caso: Transformación homológica de una cónica definida por un punto ordinario, dos tangentes y sus puntos de contacto.

dobles $a-a'$ y $b-b'$, en que se cortan las cuerdas $\overline{A-B}$, $\overline{A'-B'}$ y las $\overline{A-C}$, $\overline{A'-C'}$, respectivamente. Hallando el punto D homólogo de D'_∞ , tendremos un punto de la recta límite L del sistema cónica c ; y determinando asimismo F' , homólogo de F_∞ , podremos trazar la recta límite L' del sistema circunferencia c' , la cual, no siéndole secante ni tangente, nos indica que la cónica transformada es la elipse dibujada c .

Los puntos e' y f' en que el eje de homología corta la circunferencia, son dobles, y por tanto por ellos pasará la cónica transformada.

Séptimo caso. (Fig. 21.) La cónica está definida por dos puntos ordinarios y tres tangentes cualesquiera.

Son los puntos $A-B$ y las tangentes $T_1-T_2-T_3$.

Elijamos como cuerda común a una circunferencia c' y de centro o' , el segmento $\overline{A-B}$, el cual será el eje de homología.

Desde el punto doble $a-a'$ en que T_1 corta al eje, tracemos la tangente T'_1 a la circunferencia y hagamos lo propio con los puntos $b-b'$ y $e-e'$, obteniendo así las tangentes T'_2 y T'_3 , respectivamente.

Las tangentes T_1 y T_2 se cortan en el punto M , cuyo homólogo será el punto de encuentro de T'_1 y T'_2 ; es decir, M' . Igualmente, el punto

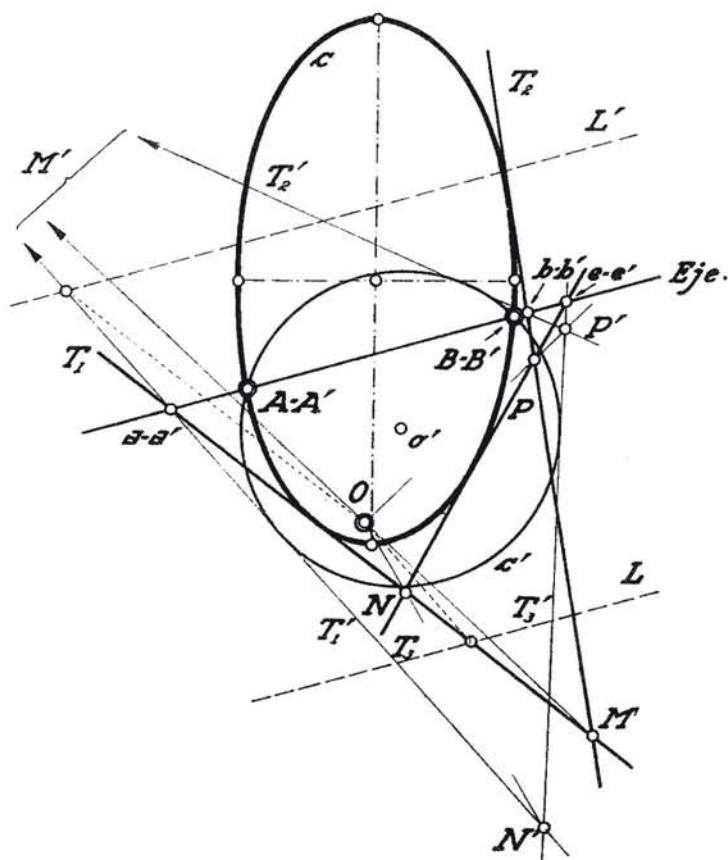


Fig. 21. — Séptimo caso: Transformación homológica de una cónica dada por dos puntos ordinarios y tres tangentes.

de encuentro N de T_2 y T_1 tendrá por homólogo el punto N' en que se encuentran T'_1 y T'_3 ; con los dos pares de puntos $M-M'$ y $N-N'$ conseguimos el centro de homología O .

Como comprobación se hallarán en línea recta los puntos O , P y P' , siendo P el punto común de las tangentes T_2 y T_3 , y P' su homólogo, es decir, el punto común a las T'_2 y T'_3 . La cónica transformada c será una elipse, puesto que la recta límite L' es exterior a la circunferencia c' .

Octavo caso. (Fig. 22.) La cónica está definida por un punto ordinario, tres tangentes y un punto de contacto.

Los datos son: El punto A , las tangentes $T_B—T_1—T_2$, siendo además B el punto de contacto de la tangente T_B .

Tomemos como centro de homología el punto O común a T_1 y T_2 , e inscribamos en el ángulo de estas dos tangentes una circunferencia c' de radio cualquiera, de centro o' .

El punto A' homológico de A , se consigue inmediatamente.

También obtenemos directamente el punto B' homológico de B , y

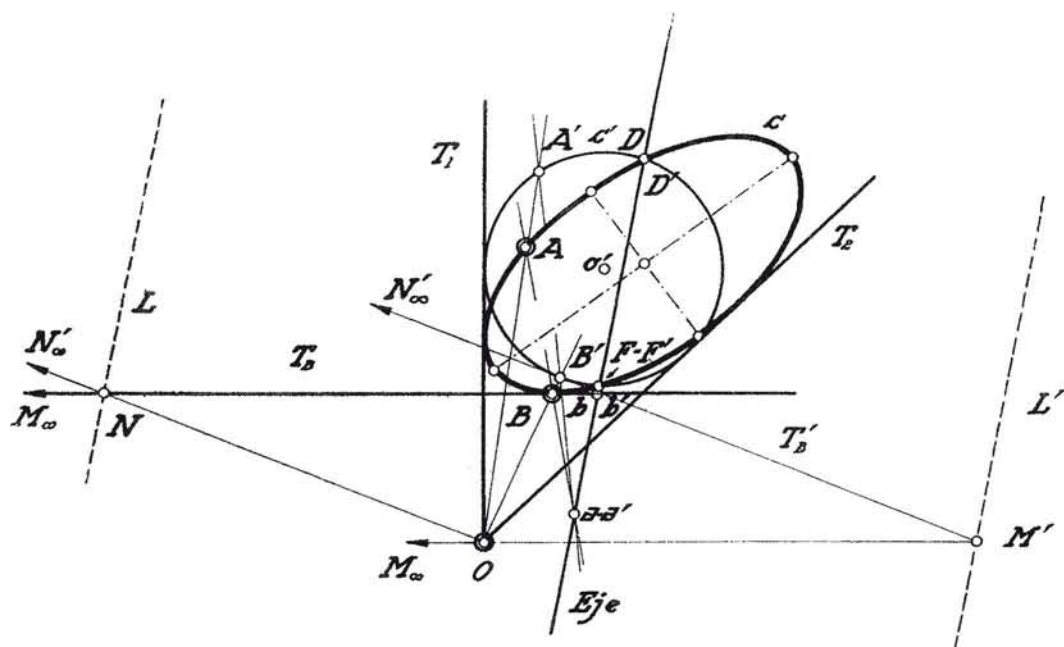


Fig. 22.—Octavo caso: Transformación homológica de una cónica dada por un punto ordinario, tres tangentes y el punto de contacto de una de ellas.

por tanto tenemos la cuerda $\overline{A—B}$ homóloga de la $\overline{A'—B'}$, que por su intersección nos da un punto doble del eje $a—a'$.

Conocido el punto B' , podemos trazar su tangente T'_B homóloga de T_B , que nos dan el punto doble del eje $b—b'$, el cual queda de esta forma definido, dando lugar a los puntos dobles $D—D'$ y $F—F'$.

Nos será sencilla la determinación de la recta límite L , mediante el punto N homólogo de N'_∞ , y de L' con M' , homólogo de M_∞ .

Noveno caso. (Fig. 23.) La cónica está definida por tres tangentes y dos puntos de contacto.

Los datos son: Los puntos $A—B$ y las tangentes $T_A—T_B—T_C$.

Elijamos como en los casos anteriores el punto O como centro de

homología, o sea el punto común a las dos tangentes T_A y T_B ; tracemos una circunferencia c' de centro o' inscrita en el ángulo formado por estas tangentes, la cual tendrá por punto de contacto con las mismas los puntos A' y B' homólogos de los dados A y B .

La cuerda $A-B$ y su homóloga $A'-B'$, nos dan un punto doble del eje $a-a'$.

La cuerda $A-B$ y la tangente T_C se cortan en un punto M , cuyo homólogo es el punto M' situado en la cuerda $A'-B'$ homóloga

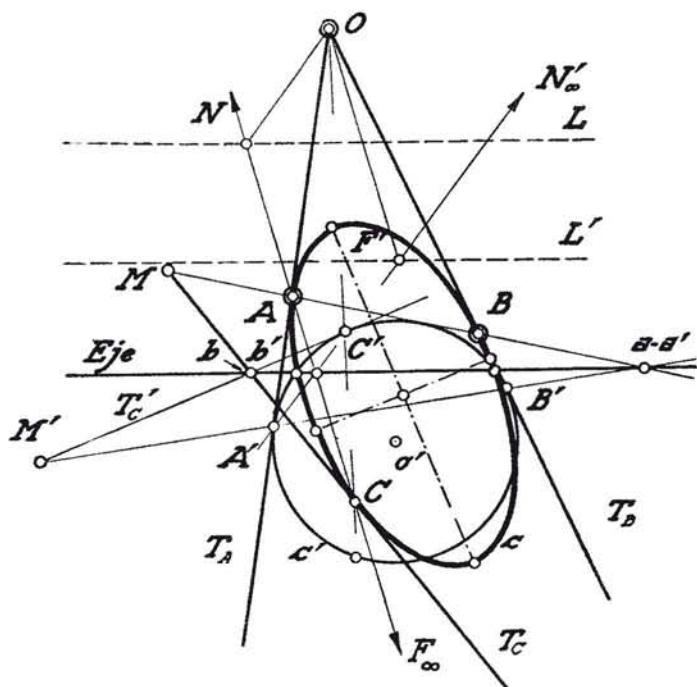


Fig. 23. — Noveno caso: Transformación homológica de una cónica dada por tres tangentes y los puntos de contacto de dos de ellas.

de $A-B$. Tracemos desde M' la tangente T'_C a la circunferencia y conseguiremos el punto doble del eje $b-b'$ y el punto de contacto C' cuyo homólogo será C sobre T_C .

Trazado el eje de la homología, éste nos da dos puntos en la circunferencia por la que habrá de pasar la cónica c dibujada, y las rectas límites se consiguen como en casos anteriores mediante los puntos N , homólogo de N'_∞ , y F' , homólogo de F_∞ .

Décimo caso. (Fig. 24.) La cónica está definida por un punto ordinario cuatro tangentes.

Los datos son: El punto A y las tangentes T_1, T_2, T_3 y T_4 .

Tomado como centro de homología, el punto O común a las tangentes T_1 y T_4 , trazaremos una circunferencia c' de radio arbitrario inscrito en estas tangentes, la cual vamos a hacer que sea homológica de la cónica a trazar c .

El punto homológico de A es A' .

Unamos el centro de homología con el punto de encuentro M de las tangentes T_1 y T_2 , y consideremos esta recta doble $p-p'$ como polar de las dos cónicas cuyo polo vamos a determinar. En la circun-

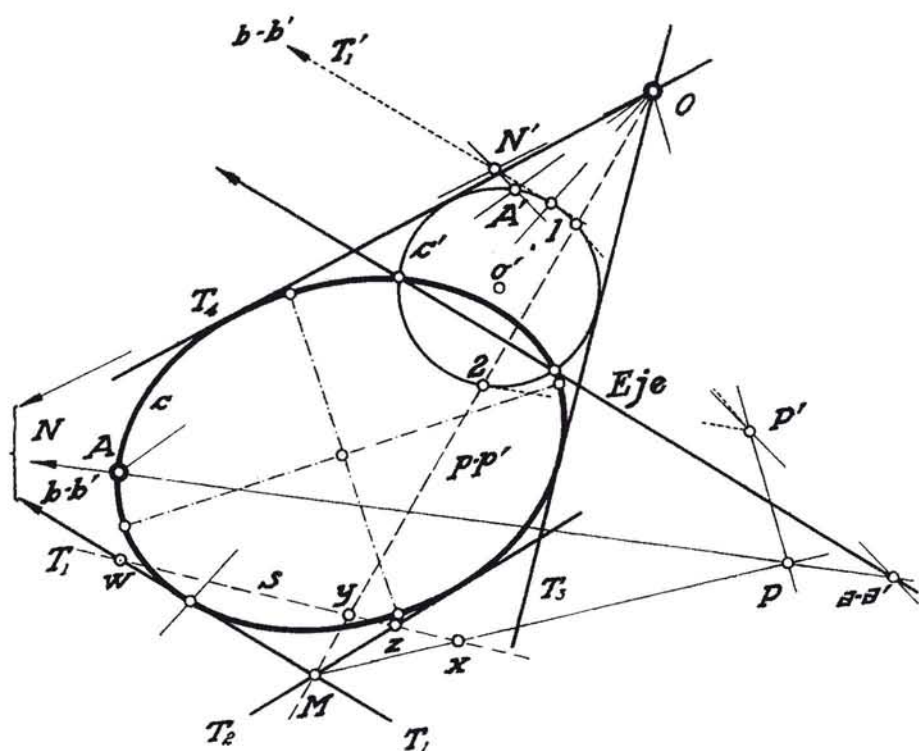


Fig. 24. — Décimo caso: Transformación homológica de una cónica dada por un punto ordinario y cuatro tangentes.

ferencia la cosa resulta sencilla, puesto que bastará trazar las tangentes en los puntos 1 y 2, obteniendo así el punto P' , polo de esta recta.

El polo P de la recta p con respecto a la cónica c , será homológico de P' y se hallará por tanto en la recta $O-P'$.

Por otro lado, si conociéramos este polo P sabríamos que por él han de pasar las polares de todos los puntos de la recta p con relación a las tangentes T_1 y T_2 ; o dicho de otro modo: el haz de vértice M formado por los rayos T_1-p-T_2 y $M-P$, es armónico.

Para conseguir, por tanto, el cuarto rayo $M-P$ separado armóni-

camente de p con respecto a T_1 y T_2 , bastará trazar una secante cualquiera s de este haz y hallar el punto x conjugado armónico de y con respecto a z y w .

Conocido P , se determina un punto doble del eje $a-a'$, como encuentro de las rectas homólogas $\overline{A-P}$ y $\overline{A'-P'}$.

Por otro lado, la cuerda $\overline{A-P}$ y la tangente T_1 se cortan en el punto N , cuyo homólogo estará situado en la recta homóloga $\overline{A'-P'}$; es decir, será N' , desde el cual trazaremos la tangente a la circunferencia T'_1 , homóloga de T_1 .

Las dos tangentes homólogas anteriores nos proporcionan otro punto doble del eje $b-b'$, quedando así definida la homología que nos relaciona la circunferencia c' con la cónica c .

Undécimo caso. (Fig. 25.) La curva está definida por cuatro tangentes y un punto de contacto.

Los datos son: Las tangentes $T_1-T_2-T_3$ y T_A , y el punto A de contacto de T_A .

Elegido el punto O como centro de homología, tracemos una circunferencia c' de centro o' inscrita en el ángulo formado por las tangentes T_1 y T_2 .

El punto A' será homólogo de A , y la tangente en él, T'_A , homóloga de T_A .

T_3 y T_A se cortan en el punto M , cuyo homólogo M' se obtiene en T'_A , y desde él trazamos la tangente T'_3 , que será homóloga de T_3 , proporcionando así el punto doble del eje $a-a'$.

Como también tenemos otras dos rectas homólogas T_A y T'_A , logramos otro punto doble $b-b'$ del eje de homología, con lo cual queda

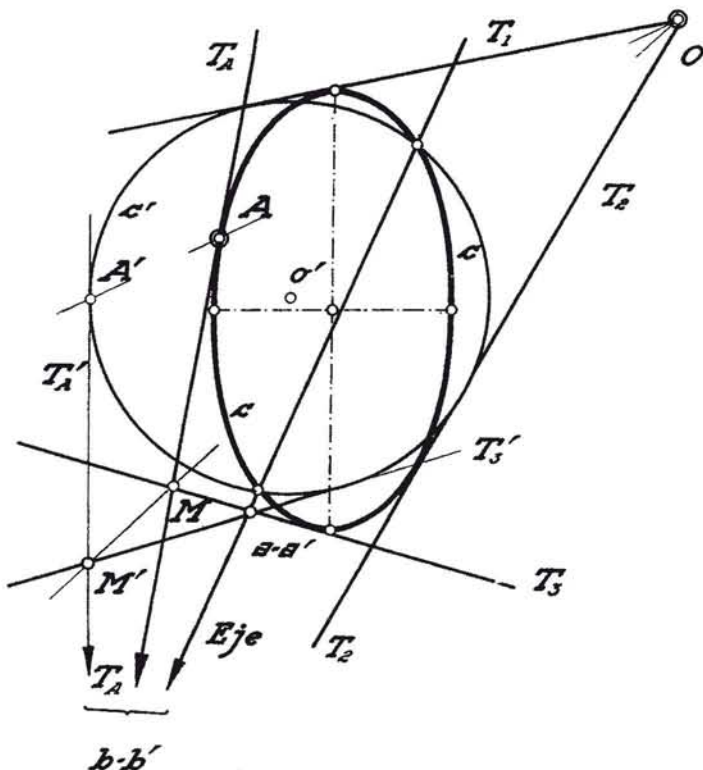


Fig. 25 — Undécimo caso: Transformación de una cónica determinada por cuatro tangentes y el punto de contacto de una de ellas.

totalmente definido el sistema que nos permite hallar la cónica c en función de la circunferencia c' .

Duodécimo caso. (Fig. 26.) La curva está definida mediante cinco tangentes, que son $T_1-T_2-T_3-T_4$ y T_5 .

Elijamos como centro de homología el punto O común a dos cualesquiera de estas tangentes, en este caso las T_1 y T_2 , y tracemos la

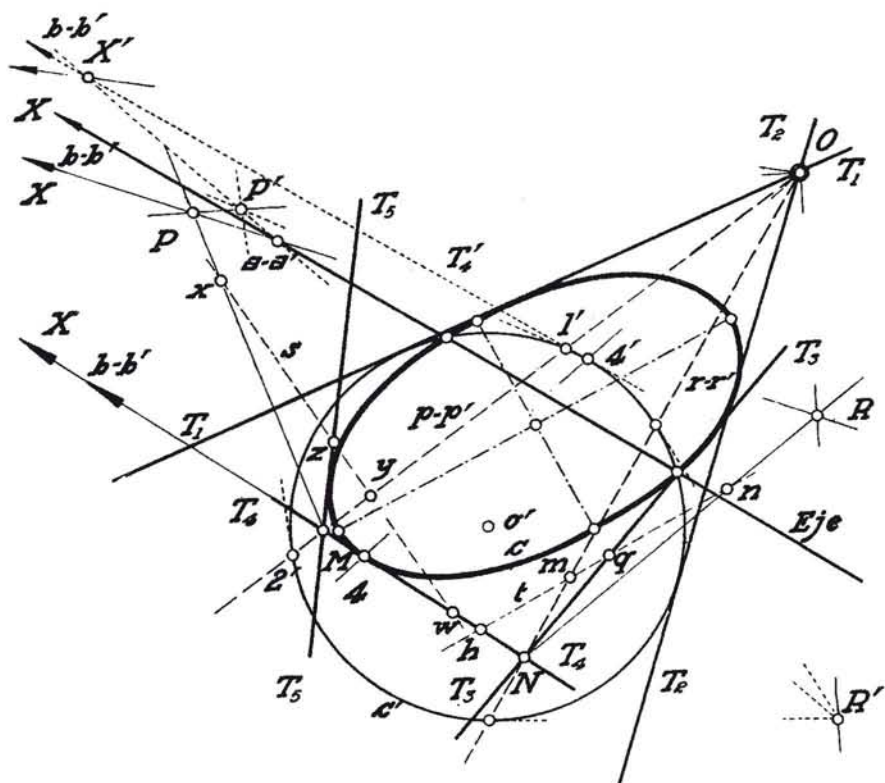


Fig. 26. — Duodécimo caso: Transformación de una cónica determinada por cinco tangentes.

circunferencia c' de radio arbitrario inscrita en el ángulo formado por dichas tangentes.

Unido el punto M en que se encuentran las tangentes T_4 y T_5 , elegiremos la recta $\overline{M-O}$ como polar doble de las dos cónicas, cuyo polo con respecto a cada una de ellas vamos a determinar.

Con relación a la circunferencia, las tangentes trazadas en los puntos $1'$ y $2'$ dan el polo P' .

Trazada la transversal s del haz T_4-p-T_5 , se obtiene la recta $\overline{M-x}$, sobre la que se hallará situado el polo P de p con respecto a la cónica c . El punto x es conjugado armónico de y con respecto a z y w , lográndose el punto deseado P por hallarse también en el rayo $\overline{O-P'}$.

De igual forma, y tomando el punto N de encuentro de las tangentes T_1 y T_2 , considero la recta doble $r-r'$ como polar de las dos cónicas, hallando así el polo R' de r' con respecto a la circunferencia, y repitiendo la construcción hecha anteriormente, con el auxilio de la transversal t logro R al unir N con n , conjugado armónico de m con respecto a q y h .

Uniendo ahora dos rectas homólogas $\overline{R-P}$ y $\overline{R'-P'}$, logro el punto doble del eje $a-a'$, y tomando ahora el punto X común a la tangente T_1 y a la recta $\overline{R-P}$, hallo su homólogo X' situado sobre la recta $\overline{R'-P'}$, desde el cual trazo la tangente T'_1 a la circunferencia, la cual será homóloga de T_1 , siendo, por último, $4'$ homológico de 4 .

Las rectas homólogas T_1 y T'_1 nos determinan otro punto doble del eje $b-b'$, con lo que queda totalmente definido el sistema de homología que nos permite trazar la cónica c determinada con arreglo a las exigencias de los datos.

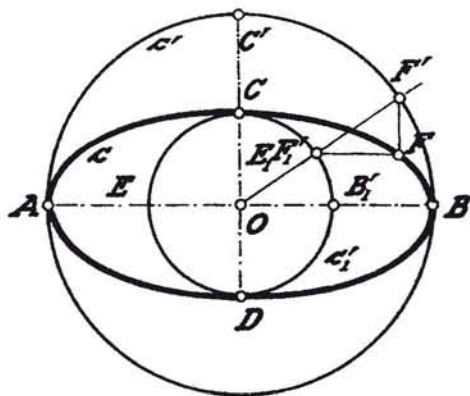


Fig. 27. — La elipse como transformada afín de la circunferencia.

Con frecuencia, además de los casos de determinación de una cónica que figuran en el cuadro anterior, se nos presentan otros en que, conociendo previamente la naturaleza de la cónica, se tienen otros elementos determinativos suficientes. Estos casos se resolverán con auxilio de una homología de planteamiento más sencillo que los anteriores. Como ejemplo, aparecen los siguientes casos:

Primer caso. (Fig. 27.) La elipse viene dada por sus dos ejes $\overline{A-B}$ y $\overline{C-D}$. Entonces podemos trazarla teniendo en cuenta que es afín a una circunferencia cuyo diámetro sea cualquiera de sus dos ejes; es decir, que la elipse c se podrá trazar como afín de la circunferencia c' siendo el eje de afinidad el eje $\overline{A-B}$ y un par de puntos afines $C-C'$. La dirección de afinidad viene dada por la recta $\overline{C-C'}$.

Igualmente podríamos conseguir el trazado de esta elipse partiendo de la circunferencia c_1' de diámetro $\overline{C-D}$, siendo entonces el punto B_1 afín de B . De la combinación de estas dos afinidades resulta la construcción sencilla de un punto cualquiera de la elipse F , afín de un lado de F' y del otro de F'_1 , hallándose situados F' y F'_1 sobre el mismo radio vector, por ser las circunferencias c' y c_1' homotéticas, con centro O .

Recordando las propiedades de la relación homológica nos será sen-

cillísimo, además del trazado de puntos, el de las tangentes que nos fueren necesarias.

Es, sin embargo, recomendable el trazado de la elipse, utilizando, a poder ser, únicamente el círculo cuyo diámetro es el eje mayor $\overline{A-B}$, por resultar más exacta su construcción.

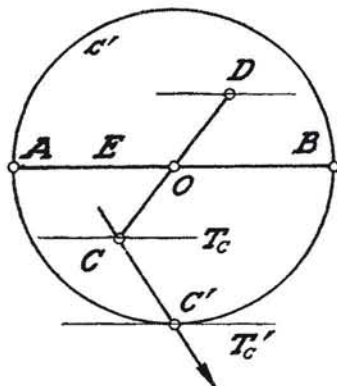


Fig. 28. — Dados dos diámetros conjugados de una elipse, se determina un sistema de afinidad para derivarla de la circunferencia.

Segundo caso. (Fig. 28.) Si la elipse viniera determinada por dos diámetros conjugados $\overline{A-B}$, $\overline{C-D}$, también podremos utilizar con gran ventaja la transformación afín de la circunferencia c' de diámetro $\overline{A-B}$ en el sistema determinado por el eje E (diámetro común) y los puntos afines $C-C'$, por corresponderse las tangentes afines $T_C-T'_C$, paralelas al eje de afinidad.

Figura 29. Como complemento necesario al trazado de la elipse, creo útil exponer uno de los procedimientos más exactos y rápidos para conseguir los ejes de la misma, partiendo del conocimiento de dos diámetros conjugados $\overline{A-B}$ y $\overline{C-D}$.

La construcción es la siguiente:

Se traza por el centro de la elipse la perpendicular $\overline{O-M}$ a uno de los diámetros conjugados (en este caso, al $\overline{A-B}$). Sobre ésta limitamos el segmento $\overline{O-M} = \overline{O-B}$ y unimos este punto M con el punto C , extremo del diámetro conjugado: $\overline{C-M}$.

Describamos ahora la circunferencia X , cuyo diámetro es $\overline{C-M}$, y la concéntrica con ésta, cuyo radio sea $\overline{X-O}$, la cual determina en la anterior recta $\overline{C-M}$ los puntos $Y-Z$ que, unidos al centro de la elipse, nos dan las posiciones de sus ejes.

Las magnitudes de éstos corresponden a los segmentos $\overline{O-P}$ y

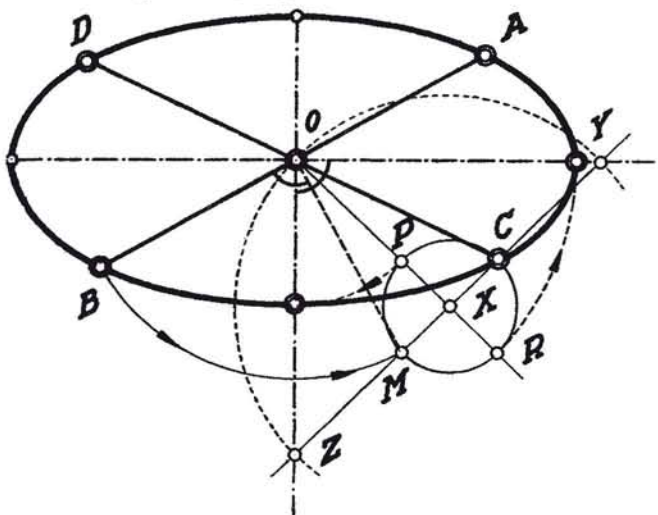


Fig. 29.—Construcción de los ejes de una elipse dada por dos diámetros conjugados.

$O-R$, respectivamente, que se trasladarán a su verdadera posición en la forma que se indica.

Nota: La demostración está fundada en que, según la figura 27, $\overline{F'-F'_1}$ es constante, el ángulo $\overline{F'-F-F'_1}$ es recto y los catetos $\overline{F'-F}$ y $\overline{F'_1-F'}$ son siempre paralelos a los ejes, cualquiera que sea el punto F .

Figura 30. Creo interesante, dado el carácter práctico que deseo dar a esta disciplina, el indicar una forma sencilla que permite dibujar con bastante exactitud una elipse con sólo cuatro arcos de plantilla, una vez determinados sus ejes.

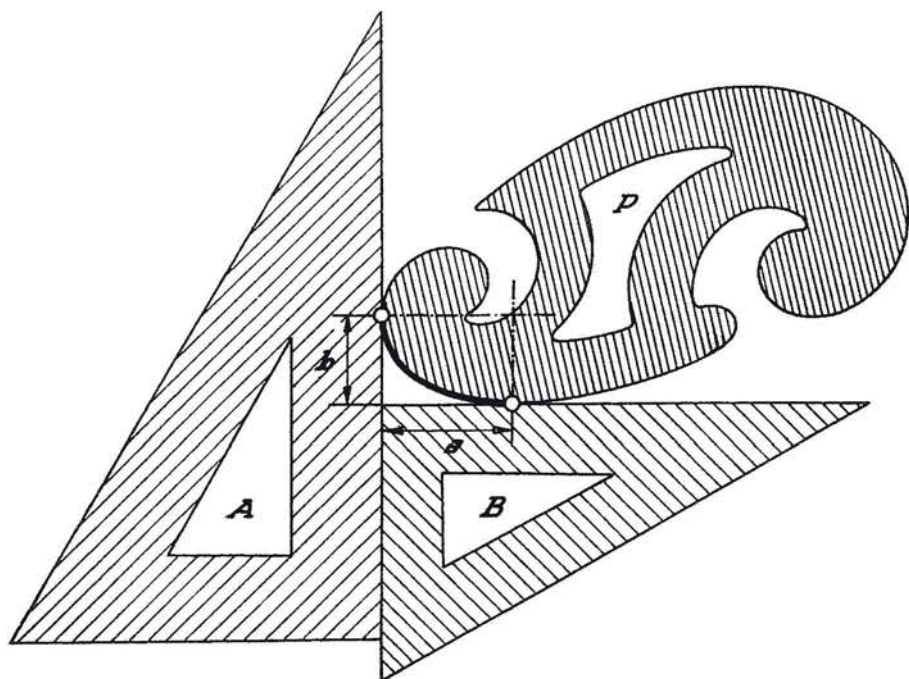


Fig. 30. — Método práctico de dibujar una elipse conociendo sus ejes.

Para elegir la plantilla, recomiendo el siguiente método: Sean a y b los semiejes de la elipse que se trata de trazar. Sobre un cartabón cualquiera A se medirá un segmento b y se marcarán sus extremos. Tomado otro cartabón B se hará coincidir el vértice de su ángulo recto con el extremo del segmento anterior b . Sobre el lado de este cartabón se habrá marcado asimismo el segmento a correspondiente al semieje de la elipse. Bastará entonces hacer resbalar una plantilla elegida convenientemente, hasta tanto coincidan sus puntos de tangencia con los extremos de los segmentos señalados, los cuales se marcarán a su vez en la plantilla.

Generalmente corresponderá este arco de plantilla a un cuadrante

de elipse perfectamente limitada por sus tangentes ortogonales, y si se deseara mayor aproximación, se podrá determinar algún punto intermedio y elegir la plantilla que responda entonces a estas tres condiciones.

Como resultado, diré que de esta forma he logrado el trazado de todas las elipses que figuran en esta obra, pudiéndose apreciar que en la mayoría de los casos la curva dibujada coincide con una verdadera elipse dentro de los límites de la precisión exigida a un trazado gráfico.

Tercer caso. (Fig. 31.) Una parábola c está determinada por su vértice V , su eje e y un punto cualquiera P .

Se trata de relacionar esta parábola con una circunferencia cualquiera mediante su transformación homológica.

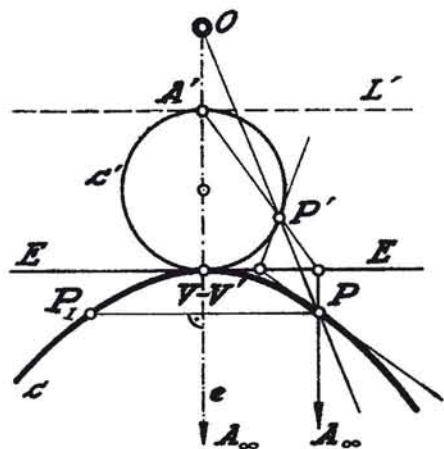


Fig. 31. — La parábola dada por su vértice, el eje y un punto, se traza en función de una circunferencia, por homología.

Tomemos como eje de homología la tangente común E en el vértice V . (Véase fig. 11.) Elijamos una circunferencia arbitraria c' que sea tangente en el mismo punto doble $V-V'$ a dicho eje.

Si esta circunferencia ha de ser homológica de la parábola, su recta límite L' ha de ser tangente a ella y paralela al eje. (Véase fig. 13.)

El punto de contacto A' tendrá como homólogo el impropio A_∞ de la parábola, pues por razón de simetría el centro de homología O que determinamos a continuación ha de hallarse sobre e .

Unamos dos puntos de la misma figura $A_\infty-P$, y así lograremos el punto P' homológico de P , con los cuales hallamos la posición de O , centro de la homología, quedando así definido el sistema que nos permitirá manejar y trazar con toda comodidad la parábola en cuestión c . Está trazada la tangente en el punto P , y P_1 es su simétrico.

Cuarto caso (Fig. 32.) La hipérbola suele estar determinada con frecuencia por sus dos asíntotas A_1-A_2 y un punto cualquiera P .

La forma de conseguir relacionar esta hipérbola así definida con una circunferencia mediante un sistema de homología, es la siguiente:

Con las asíntotas podemos trazar el eje real de la hipérbola $\overline{X-X}$, y con éste, el punto P_1 , simétrico de P . La cuerda $\overline{P-P_1}$ se tomará entonces como eje de homología $\overline{E-E}$, y elegiremos una circunferencia cualquiera c' que pase por estos dos puntos, la cual va a ser homológica de la curva en cuestión.

Desde los puntos dobles $a-a'$, $b-b'$, en que el eje corta a las asíntotas, trazaremos las tangentes a la circunferencia A_1 y A_2 , respectivamente, las cuales nos proporcionan los puntos $M'-N'$ que pertenecerán a la recta límite L' del sistema circunferencia c' . (Véase la fig. 14.)

Bastará unir los puntos homólogos $\overline{M'-M_\infty}$ y $\overline{N'-N_\infty}$ para obtener así el centro de homología O , que necesariamente, por razón de simetría, estará situado en el eje real de la hipérbola $\overline{X-X'}$.

La determinación de los vértices de la hipérbola en cuestión se conseguirá por el procedimiento ya conocido y sabiendo que han de ser homológicos respectivamente de V' y V_1 , extremos del diámetro de c' situado en el eje $\overline{X-X'}$.

En este caso hemos unido V_1 con M' , y desde el punto doble $e-e'$ la recta $e'-M_\infty$ nos dará V_1 .

Observación importante.

En la determinación de estos sistemas de homología, principalmente cuando se trata de relacionar una hipérbola, habrá de tenerse presente, al elegir el eje de homología, que ha de ser una *cuerda real común* a las dos cónicas, y por tanto, en el caso tratado habría de desecharse para esta transformación las soluciones de

tomar como eje de homología las rectas $\overline{P-P_1}$, $\overline{P_1-P_2}$, $\overline{P-P_2}$ o $\overline{P_1-P_2}$, puesto que dichas cuerdas son imaginarias en la hipérbola. Estos casos dan lugar a la llamada *homología imaginaria*, que no nos resuelve la cuestión.

Proyectividad. Aunque yo propugno con toda insistencia por la utilización de la homología para conseguir el trazado de las cónicas con mayor exactitud gráfica y rapidez, a veces puede ser interesante el recurrir a la proyectividad, a fin de manejar estas cónicas; si bien he de manifestar que el técnico ha de reunir y tener presentes, entonces, mucho mayor número de propiedades; además, sus construcciones son más laboriosas y necesitan mayor número de líneas auxiliares, con notable perjuicio de la exactitud en los resultados finales y del tiempo invertido.

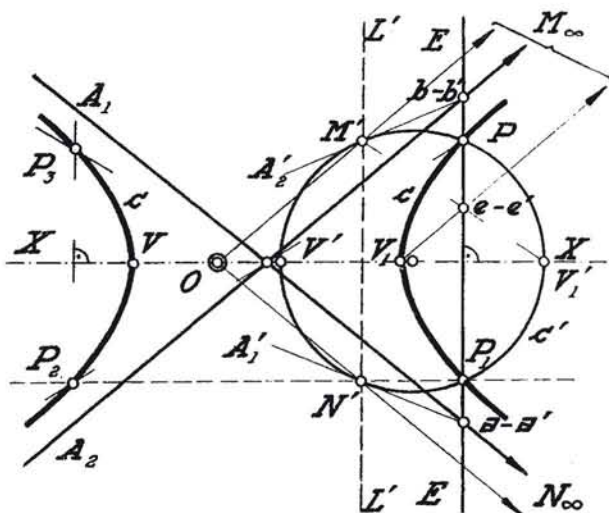
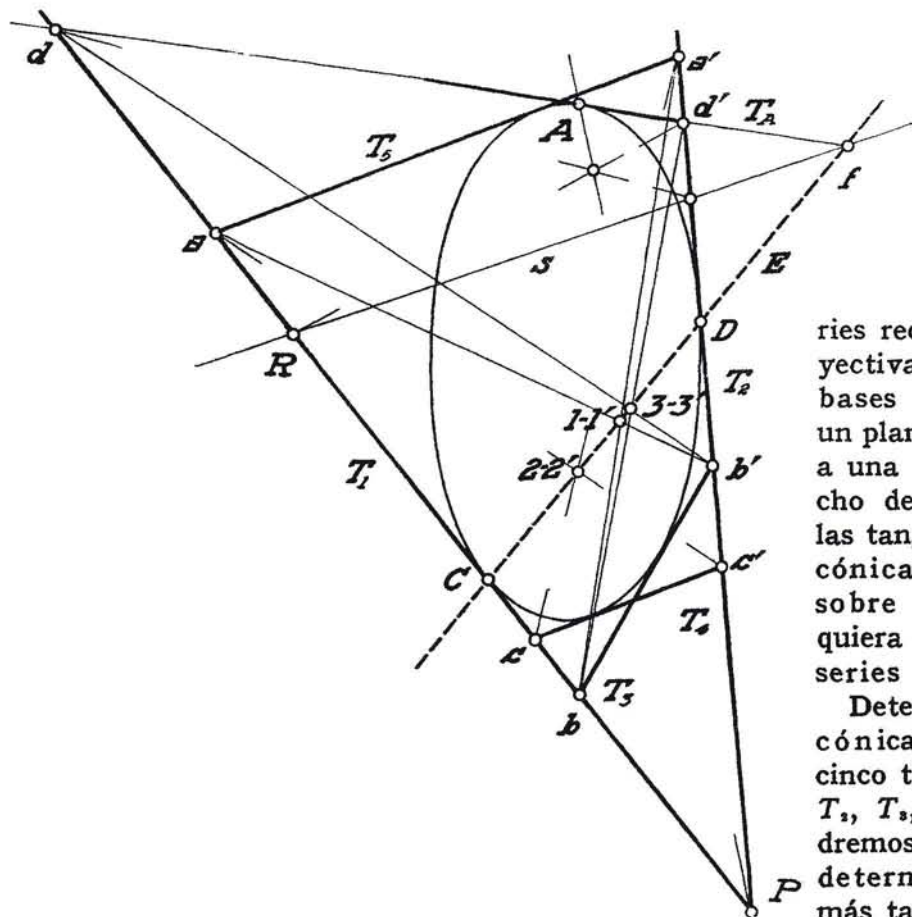


Fig. 32. — La hipérbola dada por sus asíntotas y un punto se puede obtener por homología en función de una circunferencia.

A tal fin, y suponiendo que el estudiante se halla en posesión de la teoría de la Geometría Projectiva, voy a recordar, sin demostrarlas, algunas propiedades que son de aplicación directa a la resolución de la determinación de puntos y tangentes de cónicas determinadas por sus cinco elementos integrantes:

elementos integrantes:



Primero.

(Fig. 33.)

Las rectas de unión de los puntos homólogos de dos series rectilíneas projectivas de distintas bases situadas en un plano, envuelven a una cónica; o dicho de otro modo: las tangentes a una cónica determinan sobre dos cualesquiera de ellas, dos series projectivas.

Determinada una cónica mediante cinco tangentes T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 , podremos conseguir la determinación de más tangentes a la misma, aplicando esta propiedad enunciada tomando como bases las

Fig. 33. — Las rectas de unión de los puntos homólogos de dos series rectilíneas projectivas de diferente base, situadas en un plano, envuelven una cónica.

tangentes T_1 y T_2 , donde las demás determinan puntos homólogos $a-a', b-b'$ y $c-c'$.

Para ello determinaremos el eje projectivo E trazando las rectas $a-b', b-a'$ y $a-c', c-a'$, obteniéndose así los puntos dobles $1-1'$ y $2-2'$.

Elegido un punto cualquiera d sobre T_1 , trazaremos la recta de unión $d-b'$, por ejemplo, que corta al eje projectivo en el punto $3-3'$, correspondiéndole, por tanto, la recta $b-d'$, siendo la recta $d-d'$ la tangente deseada T_A .

Para conseguir el punto de contacto A de esta tangente T_A , hallaremos el punto A conjugado armónico de f con respecto a d y d' , para lo cual nos hemos auxiliado del cuadrilátero $f-d-R-P$, siendo R cualquiera.

Los puntos en que el eje proyectivo E corta a las tangentes T_1 y T_2 tomadas como bases de las dos series, son los puntos de contacto que les corresponde en la cónica.

Hemos resuelto así el caso 12.º del cuadro.

Segundo. (Fig. 34.) Los puntos de encuentro de los rayos homólogos de dos haces de rectas proyectivos no concéntricos y situados en el mismo plano, determinan una cónica; o dicho de otra forma: los puntos de una cónica proyectados desde dos cualesquiera de ellos, determinan dos haces proyectivos.

Seccionando estos dos haces por una secante, obtenemos dos series rectilíneas proyectivas, de misma base.

Sea la cónica determinada por cinco puntos A, B, C, D, E .

Elijamos los puntos A y E como centros de los haces en cuestión, $b-c-d$ y $b'-c'-d'$.

Empezaremos por determinar el centro proyectivo O de estos dos haces, para lo cual hallaremos la recta $m-m'$ de unión de dos pares de rayos no homólogos: m común a b y d' , y m' , común a b' y d , y por otro lado, la $n-n'$: n , unión de $b-c'$, y n' , intersección de b' con c' .

La intersección de las rectas $m-m'$ y $n-n'$ nos determina el centro proyectivo O .

Para conseguir un punto cualquiera de la curva, elegiremos un rayo cualquiera f de uno de los haces; determinaremos su intersección p con un rayo cualquiera c' del otro haz, y hallaremos su correspondiente p' sobre c , mediante la recta $O-p$; p' , unido con E , vértice del haz, nos dará el rayo f' , y, por tanto, el punto de la cónica F .

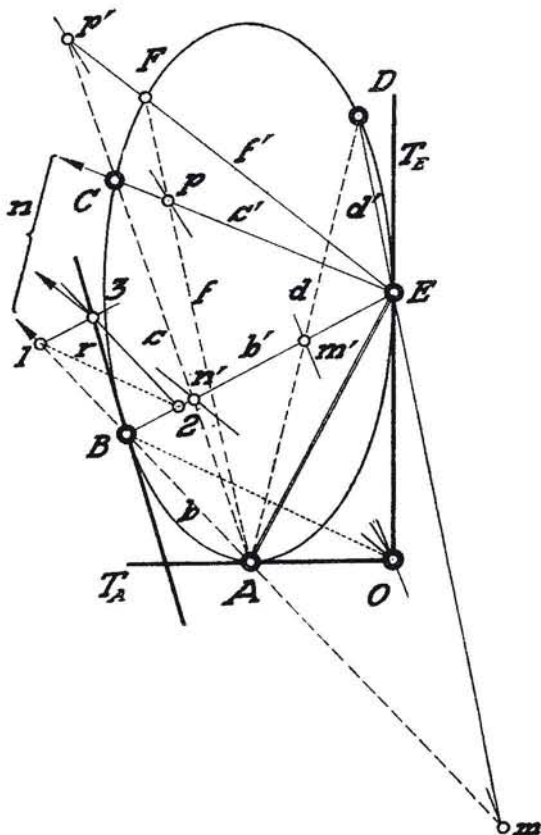


Fig. 34. — Los puntos de unión de los rayos homólogos de dos haces proyectivos de diferente vértice, situados en un plano, se hallan sobre una cónica.

Las tangentes T_A y T_E a la cónica correspondiente a los puntos A y E , elegidos como vértices de los haces, pasan por el centro proyectivo O .

Para lograr la tangente en un punto cualquiera B , emplearemos la siguiente construcción (1):

Considerados los dos rayos homólogos $b-b'$, los seccionamos por una recta cualquiera r , paralela a la de unión $B-O$.

De esta forma, y por los puntos determinados 1 y 2, completaremos el paralelogramo $1-3-2-B$. La diagonal $3-B$ resulta ser la tangente en el punto B .

Queda resuelto, con éste, el primer caso que figura en el cuadro.

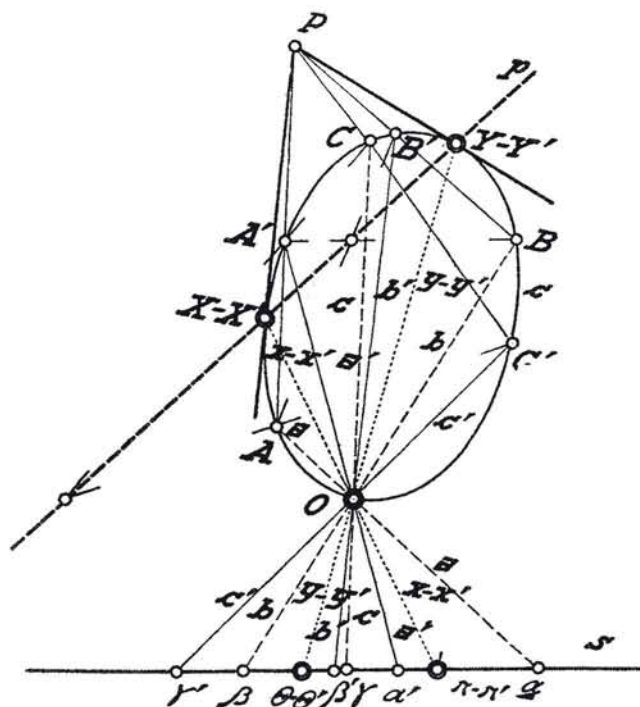


Fig. 35. — Determinación de los puntos dobles de dos series proyectivas rectilíneas superpuestas.

Tercero. (Fig. 35.) Dadas dos series proyectivas de segundo orden situadas sobre la misma cónica, se obtienen dos haces proyectivos concéntricos al proyectarlas desde uno cualquiera de dicha cónica.

Los rayos dobles de estos dos haces corresponden a los puntos

dobles de dichas series, que son los de encuentro del eje proyectivo con dicha cónica.

Al cortar estos dos haces por una secante cualquiera, y según hemos visto, obtenemos dos series rectilíneas superpuestas proyectivas, cuyos puntos dobles son los correspondientes a dichos rayos dobles.

Cuando el eje proyectivo de las dos series de segundo grado es tangente a la cónica, no existirá más que un solo punto doble, correspondiente al de contacto de dicho eje proyectivo.

La forma de conseguir dos series proyectivas de segundo orden

(1) Véase *Los Métodos Descriptivos*, F. Comez Carbonell, pág. 145.

sobre una cónica dada c , consistirá en trazar varias secantes que pasen por un mismo punto P del plano de dicha cónica, lográndose así las señaladas en la figura 35: $A-B-C$ y $A'-B'-C'$, bastando el conocimiento de tres pares de puntos para que estas series queden perfectamente definidas.

Si un punto D perteneciente a una de las series $A-B-C$ recorre la cónica, su homólogo D' la recorrerá también, existiendo dos posiciones en que coincidan con su homóloga sobre la curva y que correspondan a las posiciones comunes con el eje proyectivo $X-X'$ e $Y-Y'$, resultando ser la recta $\overline{X-Y}$, $\overline{X'-Y'}$, la polar del punto P con relación a la cónica.

Si el punto fuera interior y su polar, por tanto, exterior, los puntos dobles serían imaginarios; y cuando el punto P sea de la cónica, coincide la polar con su tangente en dicho punto, y también con la única posición confundida del punto móvil D , con su homóloga D' .

Si ahora proyectamos desde un punto O de la cónica las series $A-B-C$ y $A'-B'-C'$, obtenemos los rayos $a-b-c$ y $a'-b'-c'$, cuyos rayos dobles serán los $x-x'$ e $y-y'$.

Seccionados estos dos haces concéntricos por una secante cualquiera S , obtenemos las series rectilíneas $\alpha-\beta-\gamma$ y $\alpha'-\beta'-\gamma'$, cuyos puntos dobles $\theta-\theta'$ y $\pi-\pi'$ son los correspondientes a los rayos dobles $x-x'$ e $y-y'$.

Esto nos conduce a la determinación sencilla de los puntos dobles de dos series proyectivas rectilíneas de misma base, pues para ello bastará seguir el camino inverso; es decir, elegido un punto cualquiera O , se trazan los rayos correspondientes de dos haces proyectivos concéntricos; por este punto O se hace pasar una cónica, para mayor comodidad una circunferencia, y los rayos correspondientes habrán determinado sobre dicha circunferencia dos series proyectivas de segundo grado, las cuales darán lugar a un eje proyectivo cuyos puntos comunes con la circunferencia serán los que nos proporcionen los puntos dobles pedidos.

Lógicamente se resuelve al mismo tiempo la determinación de los rayos dobles de dos haces proyectivos concéntricos.

Cuarto. Si se proyectan desde un punto de una cónica las series rectilíneas que se originen sobre dos tangentes a la misma por todas las demás, obtenemos asimismo dos haces proyectivos concéntricos, que seccionados por una misma secante nos producen dos series proyectivas de la misma base.

Aplicaciones. Cuando una cónica se halla determinada por cuatro puntos y una tangente, podremos determinar su punto de contacto uti-

lizando las propiedades anteriormente expuestas, como aparece en la figura 36. Sean $A-B-C-D$ los puntos dados y T_x la tangente dada.

Proyectemos los puntos A y C desde B y desde D , respectivamente, obteniéndose así sobre las tangentes las series $a-c$ y $a'-c'$, que son proyectivas, y de las cuales vamos a determinar sus puntos dobles basándonos en lo anterior.

Elegido un punto O , proyectaremos los puntos $a-a'$ y $c-c'$ sobre

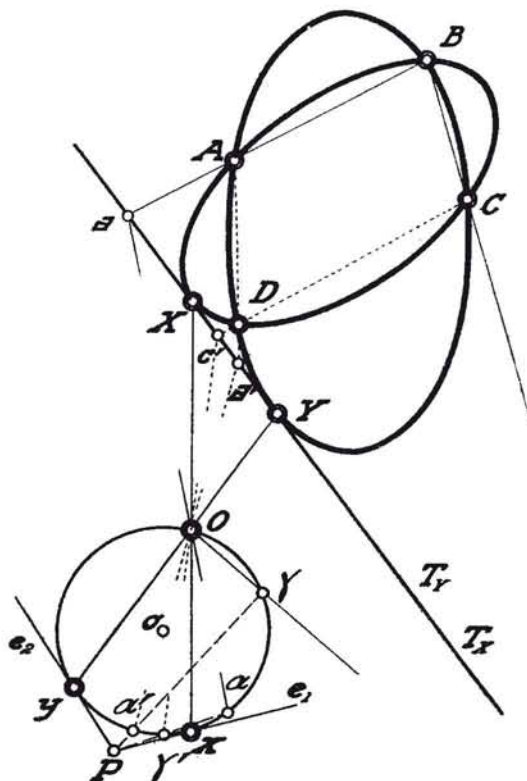


Fig. 36. — Dada una cónica por cuatro puntos ordinarios y una tangente, se halla el punto de contacto de ésta.

una circunferencia cualquiera c' , que nos determinará las series de segundo grado $\alpha-\gamma$ y $\alpha'-\gamma'$, con la condición de que su eje proyectivo sea tangente a dicha circunferencia.

De esta forma, al unir los puntos $\alpha-\gamma'$ y $\alpha'-\gamma$ tenemos el punto P , desde el cual se pueden trazar los dos ejes proyectivos tangentes e_1 y e_2 , a los cuales van a corresponder los puntos dobles x e y , con lo cual se aprecia existen dos soluciones de este problema.

Como se observa, se ha reducido este caso (el segundo que figura

en el cuadro) al caso tercero del mismo, en que se conocen tres puntos ordinarios, una tangente y su punto de contacto.

Figura 37. Determinada una cónica por cuatro tangentes y un punto, vamos a conseguir reducir éste al caso en que se conocen cuatro tangentes y un punto de contacto. Para ello, siendo $T_1—T_2—T_3—T_4$,

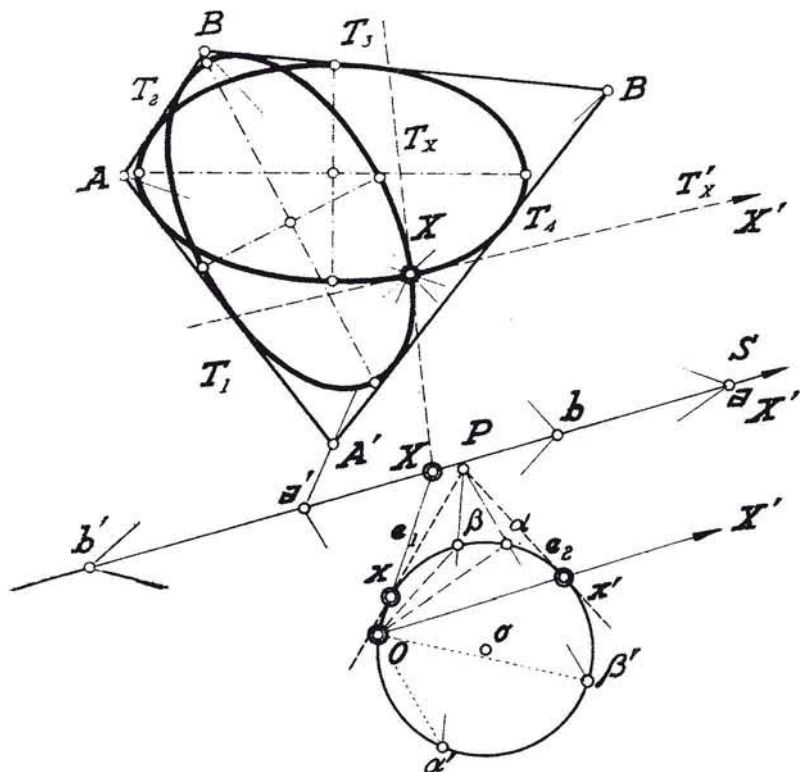


Fig. 37. — Dada una cónica por cuatro tangentes y un punto ordinario, se determina la tangente en éste.

las tangentes dadas y X el punto de la cónica, lograremos las tangentes en el punto X : T_X y T'_X , haciendo aplicación de lo anterior; es decir, proyectando desde X los puntos $A—B$ y $A'—B'$ sobre una secante cualquiera S , consiguiendo, como en el caso correspondiente a la figura 36, los puntos $\alpha—\alpha'$ y $\beta—\beta'$, con la condición de que los ejes proyectivos $e_1—e_2$ sean tangentes a la circunferencia o' .

Existen dos soluciones.

CAPITULO II

PRELIMINARES

La Geometría Descriptiva como ciencia de la representación. - Su finalidad en el campo de la técnica. - Los sistemas de representación. - Su definición y mecanismo.

La Geometría Descriptiva tiene como misión fundamental proporcionar al técnico la manera de representar y manejar formas y cuerpos concebidos en el espacio, sobre elementos que permitan su asimilación por un tercero (en general, sobre un plano), y viceversa, establece las normas por las que una forma representada con arreglo a las leyes que más adelante veremos pueda restituirse al espacio en su forma original.

Como la representación se hace generalmente sobre un plano, bien sea un tablero de dibujo o un encerado, el objetivo primordial de la Geometría Descriptiva consiste en establecer las relaciones correlativas entre la forma del espacio, o de tercera categoría, de tres dimensiones, y la forma plana de dos, o de segunda categoría.

La manera de conseguir esta reducción consiste en proyectar la forma del espacio sobre un plano para conseguir una forma de segunda categoría.

Se desprende de la finalidad de esta disciplina el que el sistema representativo haya de tener como condición esencial la de ser *reversible*, para, con arreglo a los elementos representados, conseguir, como antes hemos dicho, la forma de tercera categoría que le dió origen.

Teniendo en cuenta la anterior condición a cumplir y la posición relativa del centro de proyección y del plano de representación, se utilizan cuatro sistemas:

- 1.º Sistema acotado.
- 2.º Sistema diédrico, de doble proyección o de Monge.
- 3.º Sistema axonométrico.
- 4.º Sistema cónico o central.

Proyección. (Fig 38.) Se dice que una forma del espacio de tercera categoría se proyecta desde un punto O sobre un plano π que no pasa por él, cuando se hallan sobre dicho plano las intersecciones de los distintos rayos proyectantes, determinados por el centro de proyección O y por los distintos puntos que componen el conjunto de la forma proyectada.

En este caso, la forma A, B, \dots, F da lugar en el plano π a la forma de segunda categoría a, b, \dots, f .

He de observar que todo punto tal que F situado sobre el mismo rayo proyectante de otro punto A , en este caso $\overline{O-A}$, tendrá por

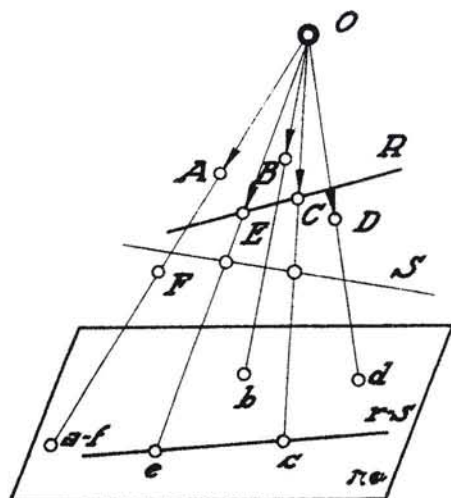


Fig. 38. — Proyección sobre un plano de una forma de 3.^a categoría.

proyección sobre el plano π un punto confundido con a , sucediendo lo propio a todos los puntos de la forma que se hallaren en las mismas condiciones.

Como una recta está determinada por dos puntos, su proyección se conseguirá uniendo la proyección de dos cualesquiera de ellos. Ejemplo: La recta R determinada por los puntos $\overline{E-C}$ se proyecta según la recta r , determinada al unir las proyecciones de los dos puntos $\overline{e-c}$.

La proyección r de R viene a ser la traza del plano proyectante de R sobre el plano π ; es decir, del plano constituido por dicha recta y por el centro de proyección O .

Por una consideración análoga a la hecha anteriormente, toda recta tal que S situada en el mismo plano proyectante de R dará lugar a una proyección s , confundida con r .

Como un plano se puede considerar determinado por tres puntos

de la forma indicada, o por dos rectas que se cortan, se puede asimismo conseguir la proyección de un plano sobre otro.

A esta proyección se la denomina proyección central o cónica, por ser O un punto propio.

Figura 39. Si el centro de proyección es impropio, los rayos proyectantes resultan paralelos, y la proyección recibe el nombre de *cilíndrica*, existiendo en este caso las mismas particularidades hechas en relación con la figura anterior, respecto de la proyección de una recta, de su plano proyectante y de la proyección de un plano.

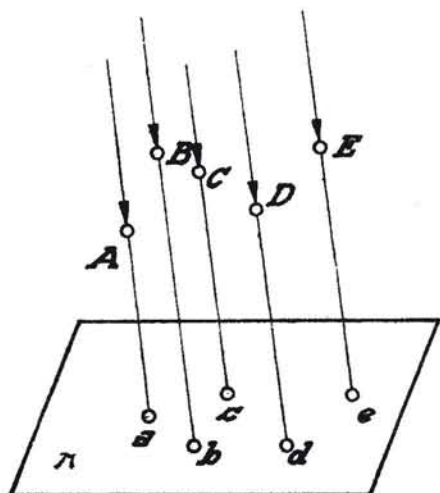


Fig. 39. — *Proyección cilíndrica.*

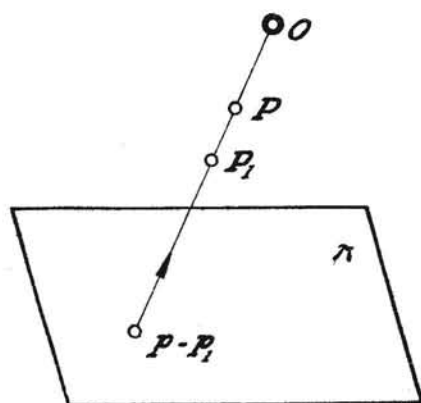


Fig. 40. — *Condición de reversibilidad de un sistema de proyección.*

Figura 40. Hemos indicado que el sistema de proyección ha de ser reversible, con lo cual quiere esto decir que, supuesto conocidos, en el plano de proyección π un punto p y el centro de proyección O , habremos de resolver la indeterminación que supone el restituir el punto del espacio a la posición que le haya de corresponder sobre su rayo proyectante, puesto que, sabiendo que todos los puntos, tales que $\overline{P-P_1}$, tienen la misma proyección $p-p_1$, habremos de disponer de los elementos necesarios para conseguir su posición real. Para ello, la forma de operar sería, por ejemplo, después de trazar el rayo proyectante en sentido inverso $p-O$, limitar sobre él, y a partir de p , el segmento $\overline{p-P}$ que nos indicara la distancia a que se encuentra dicho punto P del plano π , medida sobre su rayo proyectante.

SISTEMAS DE PROYECCION

1.º **Sistema acotado.** (Fig. 41.) El plano del dibujo es π .

La forma de conseguir la proyección de la figura del espacio con-

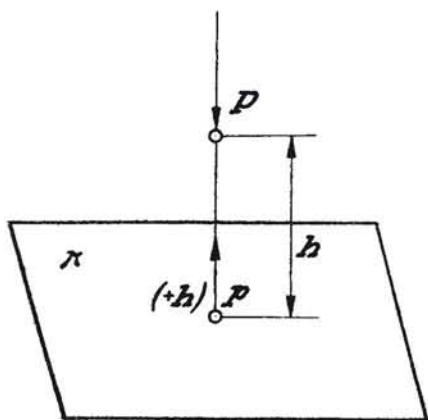


Fig. 41. — Fundamento del sistema acotado. Representación de un punto.

siste en obtener de ella una *proyección cilíndrica ortogonal* sobre dicho plano, la cual, sintetizada en un punto P , cual es el caso de la figura, nos proporciona p como pie de la perpendicular trazada desde P al plano; y para atender a la condición de reversibilidad de que antes hablamos, anotaremos al lado de p un número que nos indique la distancia del punto P al plano de proyección, o sea su cota h , la cual tendrá signo positivo o negativo, según se halle en una región o en otra con relación al plano de proyección, el cual, como se aprecia, divide al espacio en dos partes, de las que una de ellas se afectará de cotas positivas y la otra de cotas negativas.

2.º **Sistema diédrico o de Monge.** (Fig. 42.) Para evitar el inconveniente que supone en la restitución la unión en el espacio de varios puntos situados sobre la misma proyectante, tal como vienen representados en el sistema acotado, se recurre a una segunda proyección que nos evite el afectar el mismo punto proyección de varias cotas.

A tal fin se dispone de un conjunto formado por dos planos ortogonales entre sí, que se colocarán, en general: uno de ellos, horizontal, y el otro, por tanto, vertical, adoptando esta denominación en lo sucesivo: plano horizontal de proyección H y plano vertical de proyección V .

La operación en el espacio se consigue de la siguiente forma:

Se proyecta ortogonalmente el punto P sobre el plano horizontal H , dando lugar a su proyección horizontal p , y también se proyecta verticalmente, es decir, ortogonalmente al plano V , obteniendo así la proyección vertical p' .

Ahora bien: como nosotros operaremos sobre el plano del dibujo, haremos que éste coincida con el plano H (horizontal de proyección), y haremos coincidir también el plano V en su totalidad sobre H , haciéndolo girar alrededor de su recta de intersección, que llamaremos en lo

sucesivo *línea de tierra*. De esta forma, p' viene a ocupar una posición tal que se encuentren p y p' sobre la misma perpendicular a la línea de tierra, cuya demostración es evidente al observar la figura 42 en cuestión.

La distancia que separa la proyección vertical p' de la línea de tierra, será h , igual a la altura del punto P sobre el plano horizontal de

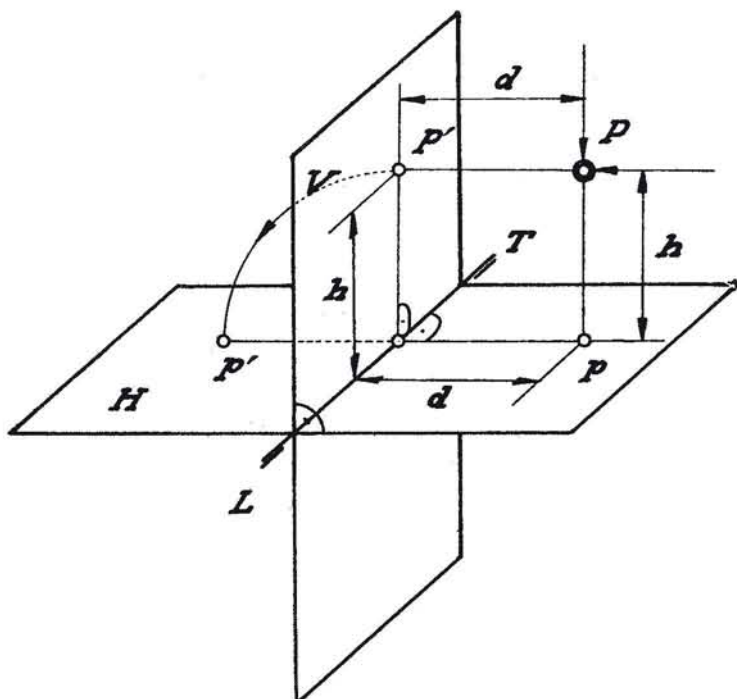


Fig. 42. — Fundamento del sistema diédrico de doble proyección o de Monge. Representación de un punto.

proyección H , es decir, la magnitud del segmento $\overline{P-p}$; de la misma forma, la distancia d que separa la proyección horizontal p de la línea de tierra, nos representa un segmento igual a la magnitud $\overline{P-p'}$, es decir, la distancia existente entre el punto del espacio P y el plano vertical V de proyección.

Al conjunto de todos los puntos tales que p , proyección horizontal de los del espacio, se acostumbra a llamar también *planta del conjunto*; y a la proyección vertical del mismo se le denomina también *alzado*.

En la figura 43 aparece en el plano del dibujo tal y como realmente las cosas suceden; es decir, que la línea de tierra viene representada

por una recta $L-T$, y a ambos lados de la misma aparecen las porciones de plano que corresponden a la proyección horizontal y a la proyección vertical. Fácilmente se ve que el sistema es reversible, pues para ello imaginemos que, a partir de la recta $L-T$, se coloca perpendicularmente al plano del dibujo, es decir, a H , el plano V , en la misma forma representada en la figura 42.

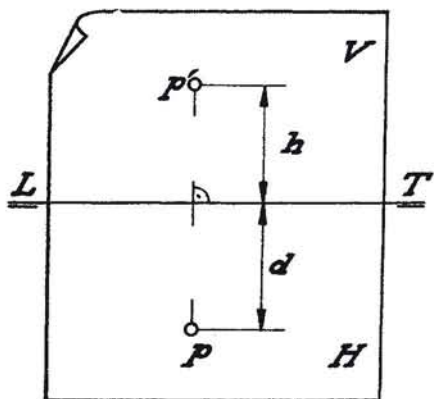


Fig. 43. — El plano de representación coincide con el del dibujo. Representación de un punto en el sistema diédrico.

Si ahora desde p levantamos la perpendicular a H , y desde p' la perpendicular a V , observaremos que estas dos perpendiculares se cortarán en un único punto del espacio, que será el punto P , el cual dió origen a las dos proyecciones en cuestión, $p-p'$.

Sistema axonométrico. (Fig. 44.) Supongamos un triedro trirectángulo $O-(X)-(Y)-(Z)$.

Dado un punto P del espacio, proyectaremos ortogonalmente este punto sobre las tres caras de este triedro trirectángulo, obteniendo así las proyecciones $(p')-(p'')-(p''')$; es decir, habiendo obtenido los segmentos $\overline{(P)-(p''')}$, $\overline{(P)-(p'')}$ y $\overline{(P)-(p')}$, iguales, respectivamente, a las coordenadas $(x)-(y)-(z)$ del punto (P) con relación al sistema del espacio.

Hagamos pasar ahora el plano de proyección π por el vértice O del triedro trirectángulo, y proyectemos ortogonalmente el conjunto del espacio constituido por la forma (P) y por sus respectivas proyecciones (p') , (p'') y (p''') .

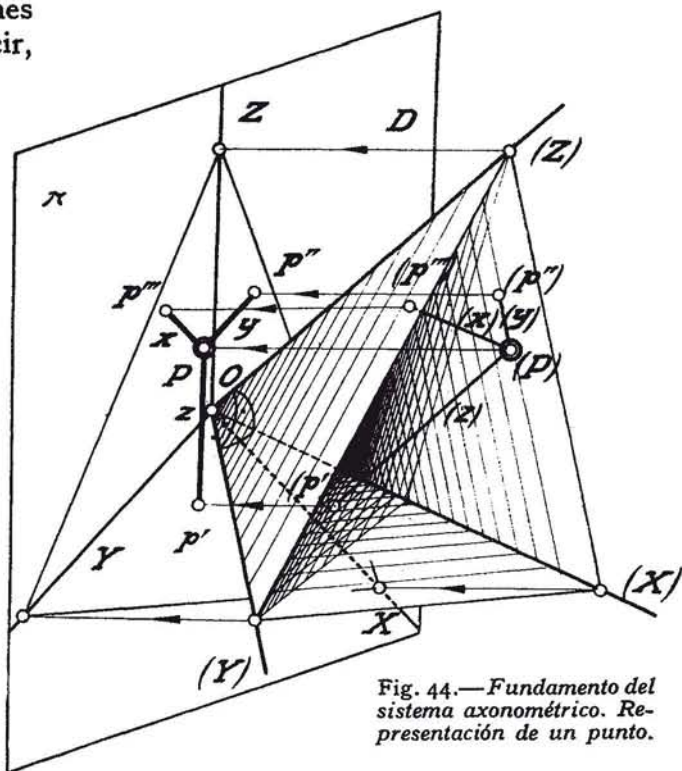


Fig. 44.—Fundamento del sistema axonométrico. Representación de un punto.

De esta forma obtendremos:

Una proyección directa P del punto (P) y tres proyecciones, $p'-p''-p'''$, de los anteriores, (p') , (p'') y (p''') , situadas sobre las caras del triedro trirectángulo.

En esta nueva proyección se aprecian de una sola vez las tres coordenadas del punto (P) ; es decir, que se obtienen los segmentos x , y y z , $\overline{P-p''}$, $\overline{P-p''}$ y $\overline{P-p'}$, proporcionales a las coordenadas $(x)-(y)-(z)$, que son las que aparecen en la figura 45, en que el plano π se ha hecho coincidir con el plano del dibujo.

También se observa que este sistema es perfectamente reversible.

Se comprende que las direcciones de las proyecciones $O-X$, $O-Y$ y $O-Z$ de los ejes sean cualesquiera y vengán en función del ángulo que forma el plano π con las aristas del triedro trirectángulo; pero existe una posición tal en que los ángulos que formen entre sí dichas proyecciones sean iguales a 120° , y por ello recibe el nombre este sistema de *sistema axonométrico isométrico*, que utilizaremos con mayor profusión en el transcurso de este libro, dejando para el estudio de ulteriores aplicaciones cualquier otro sistema axonométrico asimétrico, que trataremos en el tercer tomo con el título de *Perspectiva axonométrica*.

En la axonometría isométrica, los segmentos paralelos a las aristas del triedro, es decir, las coordenadas de los puntos, están afectadas en su proyección por el mismo coeficiente de reducción, por formar ángulos iguales los tres ejes $O-(X)$, $O-(Y)$, $O-(Z)$, con el plano π .

Para que un punto esté representado en este sistema bastará conocer dos de sus proyecciones; es decir, por ejemplo, la directa y una de las laterales P y p' ; o bien, dos laterales cualesquiera, p' y p'' , pues con ellas se obtienen las otras dos, debiendo observar, sin embargo, la posición relativa que han de ocupar, pues se ha de verificar la condición de que las paralelas a los ejes trazadas por ellas se cortan en el mismo punto del tercero; es decir, que $\overline{p'-1}$ y $\overline{p''-1}$ han de ser paralelas a los ejes Y y Z , respectivamente, y que lo mismo ha de suceder con respecto a $\overline{p''-2}$ — $\overline{p'''-2}$ y con $\overline{p'-3}$ y $\overline{p'''-3}$.

Sistema cónico. (Fig. 46.) El sistema cónico está compuesto por el plano de proyección π y el centro de proyección O .

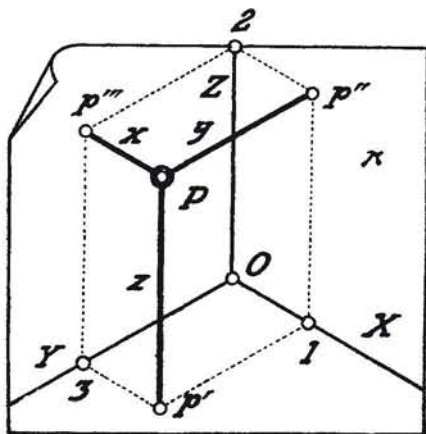


Fig. 45. — El plano de representación coincide con el del dibujo. Representación de un punto en el sistema axonométrico.

El plano π se denomina *plano del cuadro*.

Un punto M queda determinado conociendo su proyección cen-

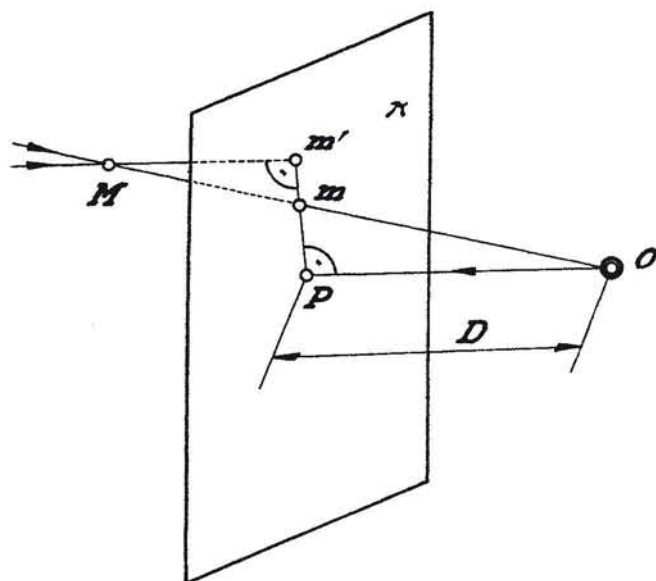


Fig. 46. — Fundamento del sistema cónico. Representación de un punto.

$m'-m$ pase por el punto P , lo cual es evidente, puesto que tal recta $m'-m-P$ es la traza del plano π con el plano formado por los tres puntos $O-P-M$, por ser paralelas las rectas $M-m'$ y $O-P$.

Pasemos ahora al plano del dibujo (fig. 47) sobre el que se ha hecho coincidir el plano de proyección π , en el que tenemos representado el punto principal P y la distancia D del centro de proyección a dicho plano π . En él tendremos los puntos $m-m'$, proyección central y ortogonal, respectivamente, del punto M del espacio. Se aprecia la reversibilidad del sistema, pues para restituir el punto M a su posición verdadera bastará efectuar la operación siguiente (ténganse a la vista las figuras 46 y 47.):

- 1.º Levantar a partir de P la perpendicular al plano del dibujo y tomar sobre ella la distancia D .
 - 2.º Unir el punto O así determinado con m .
 - 3.º Trazar desde m' la perpendicular al plano del dibujo.
- La intersección de esta última perpendicular con el rayo

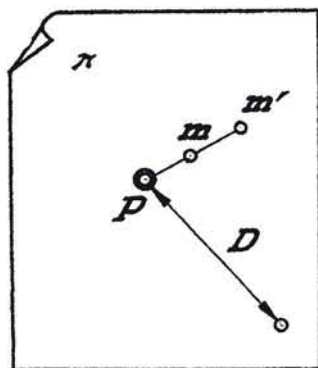


Fig. 47. — El plano de representación coincide con el del dibujo. Representación de un punto en el sistema cónico.

$O-M$ nos individualizará la posición del punto del espacio M .

Existe, sin embargo, una modalidad de la representación en el sistema cónico, que es el que vamos a emplear en lo sucesivo, por tener grandes ventajas tanto como sistema general de representación central, sino además por permitirnos con gran facilidad el paso de un sistema a otro, así como también de preparación a la importantísima aplicación que veremos en el tomo 3.^o de *Perspectiva cónica o lineal*.

Figura 48. La tal modalidad consiste en que, además del plano π de proyección y del centro O

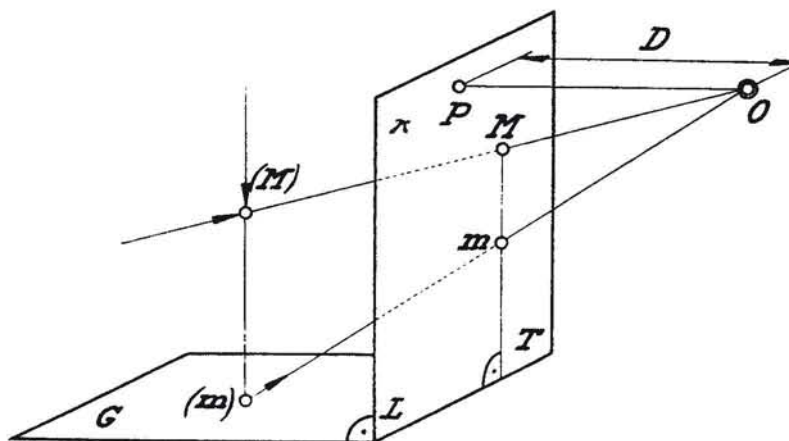


Fig. 48. — Variante del sistema cónico. Representación del punto.

que define este sistema, se utiliza un plano perpendicular a π , que generalmente es horizontal, y que llamaremos *geométrico*, G . La recta LT , intersección de G con π , se llama también *línea de tierra*. De esta suerte viene modificada la proyección central de la siguiente forma:

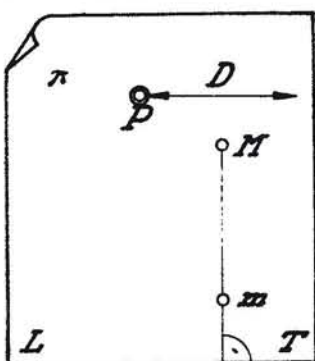


Fig. 49. — El plano del cuadro coincide con el del dibujo. Representación de un punto en el sistema cónico.

Se obtiene primeramente el punto M , proyección directa central, desde O sobre π del punto del espacio (M) . Seguidamente se proyecta ortogonalmente el punto (M) en (m) sobre G , y nuevamente se efectúa la proyección cónica de (m) sobre el plano de proyección π , dando lugar a m .

Entonces, siendo la recta $\overline{(M)-(m)}$ del espacio perpendicular a todas las rectas del plano geométrico G , lo será también a la de intersección LT de G con π , y su proyección sobre el plano del cuadro será la recta $\overline{M-m}$, también perpendicular a LT , tal y como aparece en la figura 49, donde se ha hecho coincidir el plano de proyección π con el plano del dibujo.

De una manera análoga a la que hemos explicado anteriormente, pero con la modificación ya apuntada, se podrá ver la forma de restituir el punto (M) a su posición en el espacio.

Resumen. A título de ejemplo viene representado un cubo en los cuatro sistemas de representación, donde se va a apreciar la diferencia

esencial entre dichos sistemas y de los resultados que con ellos se logran.

Figura 50. Empezando por el sistema acotado, tenemos representadas en la figura de referencia las operaciones efectuadas para conseguir la proyección acotada del cubo, en la que se aprecia que los puntos tales como *A* y *B*, situados en la misma arista, tienen

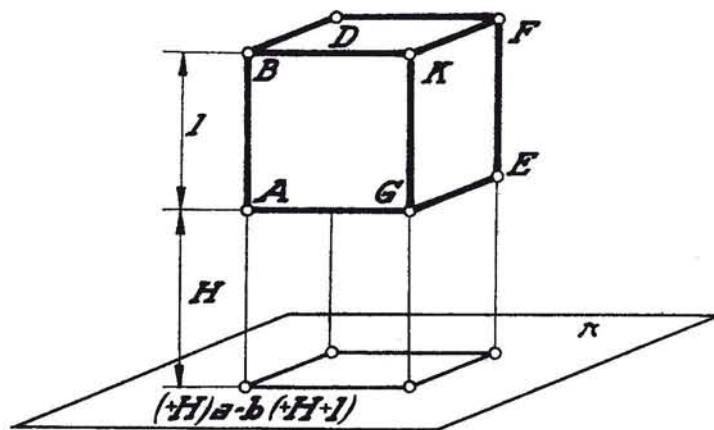


Fig. 50. — Proyección del cubo en el sistema acotado.

la misma proyección *a—b*, que es preciso afectar de sus cotas correspondientes, tal y como aparece en la figura 51, en que el plano π coincide con el plano del dibujo.

Se deduce de esta proyección que, efectivamente, existe una posibilidad de confusión cuando se trata de unir en el espacio puntos restituídos que se hallan sobre varias proyectantes comunes, y que por ello este sistema se habrá de utilizar cuando la forma de tercera categoría tiene un solo punto por proyectante, lo cual sucede en las superficies topográficas y algunas otras, que estudiaremos en el tomo de *Aplicaciones*, donde se usa este sistema de proyección, teniendo en cuenta otras ventajas que en su día veremos.

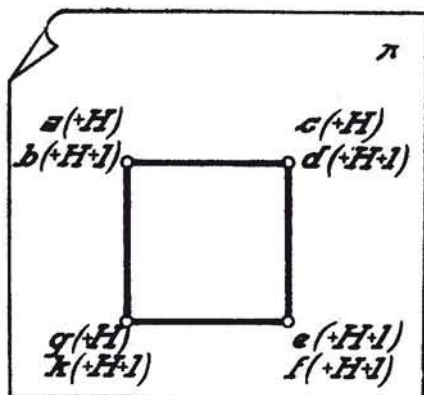


Fig. 51. — Representación del cubo en el sistema acotado.

Figura 52. En el caso del sistema diédrico, el cubo que se proyecta se ha colocado de propio intento con sus caras paralelas a los planos de proyección *H* y *V*, respectivamente; en la figura 53 aparecen sus proyecciones, haciendo coincidir, como ya hemos visto, el plano vertical *V* con el plano horizontal *H*, y ambos, con el plano del dibujo. Si bien estos puntos proyectados se confunden dos a dos, como en el caso del sistema acotado, en cuanto a la proyección horizontal se refiere,

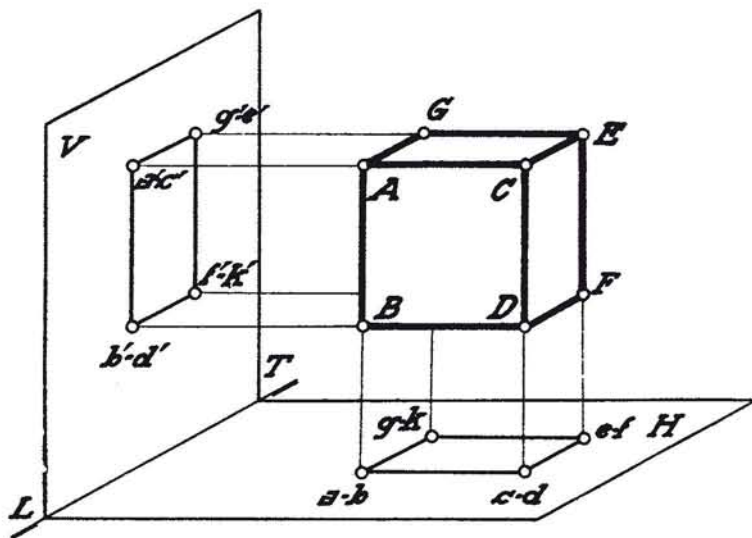


Fig. 52. — Proyección del cubo en el sistema diédrico.

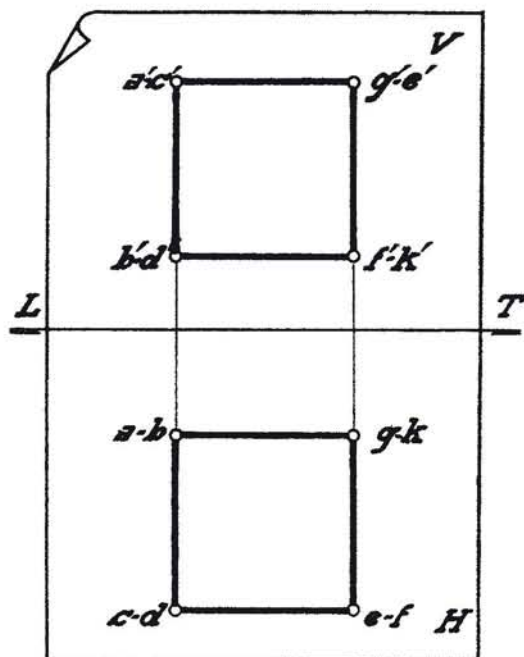


Fig. 53. — Representación del cubo en el sistema diédrico.

por ejemplo, la proyección vertical se encarga de resolvernos la indeterminación que pudiera existir al restituir dos puntos al espacio para unirlos ordenadamente.

Las mismas consideraciones haremos en el sistema axonométrico isométrico (figs. 54 y 55) y en el sistema cónico (figuras 56 y 57).

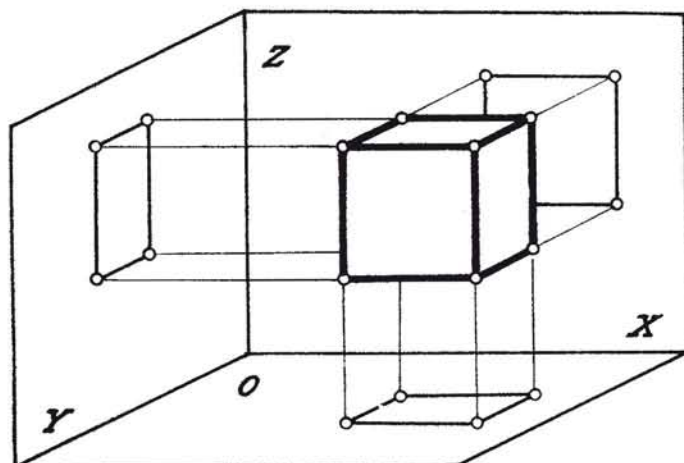
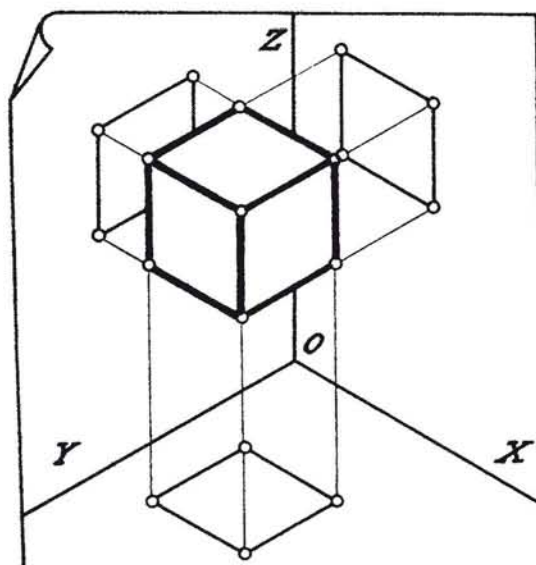


Fig. 54. — Proyección del cubo en el sistema axonométrico.



Si tenemos en cuenta la finalidad conseguida por estos cuatro sistemas de representación, vemos que en estos dos últimos, *axonométrico* y *cónico*, se aprecia en una sola proyección (la directa) las tres dimensiones principales a la vez, si bien ninguna de ellas resulta igual a su proyección sobre los planos de referencia motivo por el cual llamaré a estos dos sistemas puramente *representativos*, para distinguirlos de los dos anteriores, *acotado* y *diédrico*,

Fig. 55.—Representación del cubo en el sistema axonométrico.

en los que las dimensiones paralelas a los planos de proyección se proyectan en su verdadera magnitud, motivo por el cual denomino a estos dos sistemas *sistemas de medida*.

Esta diferencia se apreciará a medida que vayamos desarrollan-

do esta disciplina, donde utilizaremos el sistema conveniente, según sea la aplicación que vayamos a necesitar del dibujo representativo.

Adelantándonos a lo que a *aplicaciones* se refiere, ya nos podemos

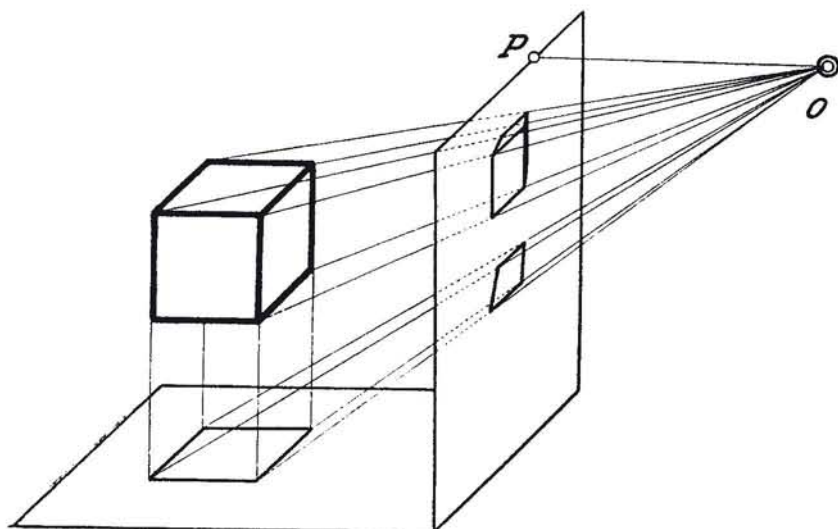


Fig. 56. — *Proyección del cubo en el sistema cónico.*

dar cuenta de que, utilizando los dos sistemas, *axonométrico* o *cónico*, de un solo golpe de vista apreciaremos tanto la forma como la relación de los elementos situados en el espacio; no sucediendo lo mismo con el sistema *diédrico* y con el *acotado*, con los cuales llegaremos a formarnos un concepto claro del conjunto representado y de la posición relativa de sus elementos componentes, después de efectuar cierta gimnasia intelectual efectuada con las proyecciones dadas.

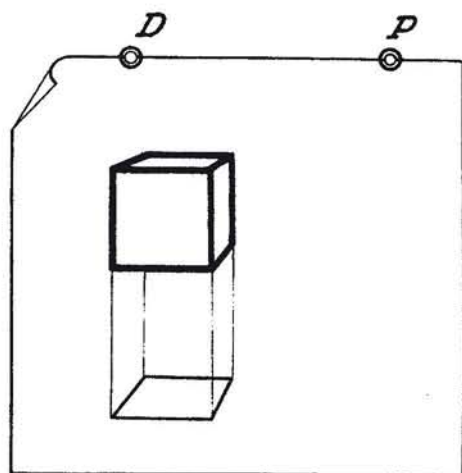


Fig. 57. — *Representación del cubo en el sistema cónico.*

CAPITULO III

SISTEMA ACOTADO

Representación y alfabeto del punto, de la recta y del plano.

Ya hemos visto en el capítulo anterior (fig. 41.) cómo se consigue la representación del punto.

Alfabeto del punto. (Fig. 58.) Llamaremos alfabeto del punto a las distintas representaciones del mismo, según sea su posición relativa con respecto al plano de proyección.

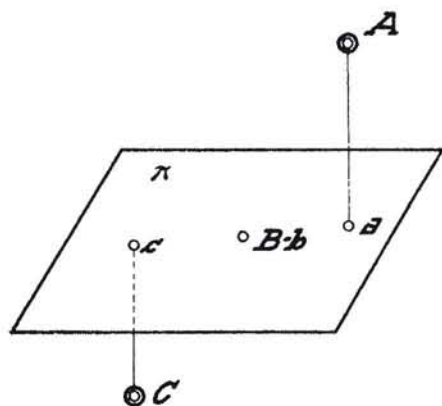


Fig. 58. — Sistema acotado. Alfabeto del punto.

Hemos visto que el plano de proyección π divide al espacio en dos regiones: una positiva y otra negativa.

Solamente son tres las posiciones posibles de dicho punto: A, situada por encima del plano π ; B, situado en él, y C, por debajo; es decir, en la región opuesta a la A.

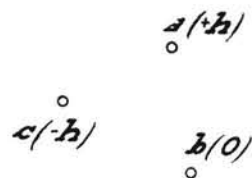


Fig. 59. — Sistema acotado: Alfabeto del punto.

La diferencia existente en la representación de estos puntos solamente está en el signo de su cota.

Figura 59. Supuesta positiva la región donde se encuentra el punto A, su representación será A con su cota h positiva; es decir, $a(+h)$; b tendrá como cota (0) , y c tendrá como cota $(-h)$.

Representación de la recta. Figura 60. Hemos visto que la recta R , hallándose determinada por dos puntos A y B , tendrá como proyección r la resultante de unir las proyecciones a y b de sus puntos.

Es notable el conocimiento del punto t de la recta, que es su traza con el plano π de proyección; es decir, el punto de altura *cero*, a partir del cual todos los demás, tales como el C , tendrán por proyección un punto c de cota negativa.

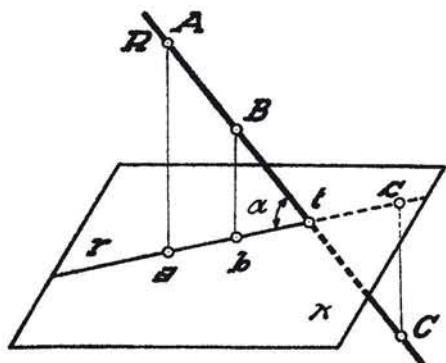


Fig. 60. — Sistema acotado: Representación de la recta.

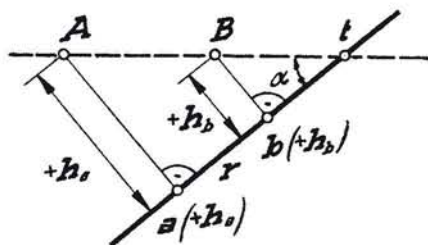


Fig. 61. — Sistema acotado: Pendiente de una recta.

Se llama *pendiente de una recta* a la tangente del ángulo α que forme con su proyección; en este caso, y pasando a la figura 61 vemos representada la recta r mediante los puntos a de cota $(+h_a)$ y b de cota $(+h_b)$, siendo t su traza.

Es indudable que si a partir de a y de b trazamos las perpendiculares a r , y sobre ellas las cotas de sus puntos $(+h_a)$ y $(+h_b)$, respectivamente, obtendremos la recta $A-B$, que formará el ángulo α , el cual nos medirá la pendiente de la recta R del espacio con relación al plano de proyección π .

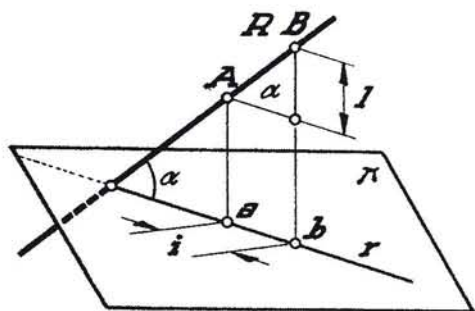


Fig. 62. — Sistema acotado: Intervalo de una recta.

Es de tener muy en cuenta que es preciso fijar la escala de alturas; es decir, saber de antemano la unidad de altura que se ha de utilizar, a fin de conocer el verdadero ángulo de pendiente de la recta en cuestión.

A tal fin, y como se representa en la figura 62, una recta R proyectada en r tendrá un segmento $A-B$ proyectado en $a-b$, que corresponda a una unidad de altura; es decir, cuya diferencia de cotas sea la unidad, llamándose entonces *intervalo* a la proyección $a-b$ del segmento $A-B$. Dicho intervalo lo utilizaremos con mucha frecuencia, pues él nos indicará la pendiente de una recta siempre que conozcamos la escala de alturas.

Si, como en la figura 63 aparece, viene representada una recta por dos puntos A y B de cotas positivas y enteras $(+6)$ y $(+2)$, respectivamente, esto nos indicará que el segmento $\overline{a-b}$ tiene cuatro intervalos que se señalarán, operación que se llama *graduar una recta*.

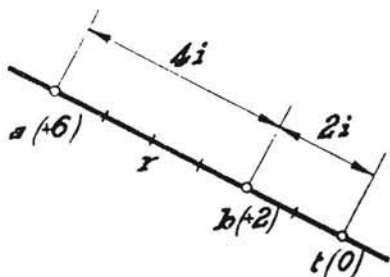


Fig. 63. — Sistema acotado: Graduar una recta.

Alfabeto de la recta. Esta solamente puede ocupar tres posiciones interesantes con respecto al plano de proyección π , que son:

1.º Cualquiera, como en las figuras 60 y 63.

2.º Perpendicular a π (fig. 64). La recta R , por ser una proyectante, solamente tiene como representación un punto (fig. 65) y su intervalo es cero.

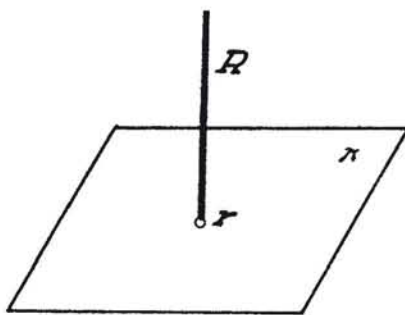


Fig. 64. — Sistema acotado: Recta de punta o proyectante.



Fig. 65. — Sistema acotado: Representación de una recta de punta.

3.º La figura 66 representa una recta $R-r$ paralela al plano de proyección, lo cual se comprueba porque sus puntos tienen todos la misma cota. En este caso (fig. 67), la recta viene representada por dos puntos a , de cota $(+h)$, y b , también de cota $(+h)$.

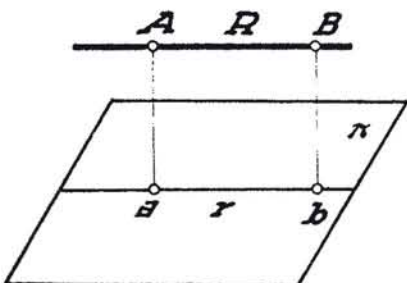


Fig. 66. — Sistema acotado: Recta horizontal.

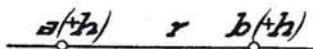


Fig. 67. — Sistema acotado: Representación de una horizontal.

El intervalo de esta recta vale infinito y la traza es su punto impropio.

Representación del plano. (Fig. 68.) Sabemos que el plano está determinado por tres puntos: $A-B-C$.

Es indudable que el conocimiento de las proyecciones $a-b-c$ de los tres puntos determinativos del plano, conocidas sus cotas, nos individualizarán su posición; pero no nos resulta cómoda la representación del mismo mediante estos tres puntos, puesto que se complicarían las construcciones al manejarlos, motivo por el cual se precisará recurrir a otra forma de representar el plano, aunque partamos de sus tres puntos. Esto se logra mediante el conocimiento de su *línea de máxima pendiente*, lo cual se aprecia en la figura 69, como vamos a detallar: Se dan los tres puntos cualesquiera $a (+6)$, $b (+2)$ y $c (+4)$.

Lo primero que haremos será hallar la traza de este plano con el

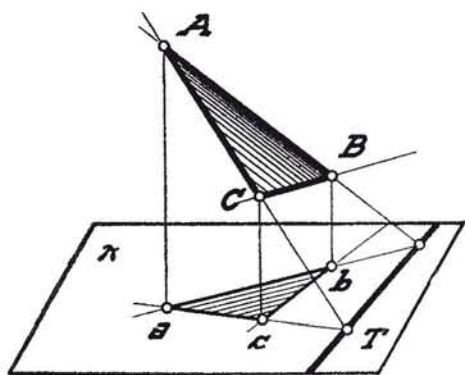


Fig. 68. — Sistema acotado: Plano determinado por tres puntos.

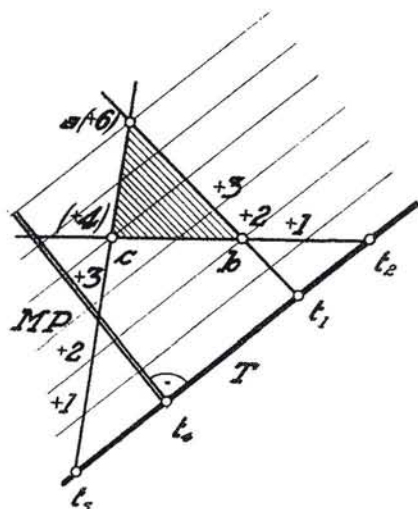


Fig. 69. — Sistema acotado: Representación de un plano dado por tres de sus puntos.

plano π , lo cual conseguiremos graduando las rectas $a-b$ y $c-b$, por ejemplo (nos bastan dos), y aplicando lo expuesto en relación con la figura 63, obtendremos así las trazas t_1 y t_2 .

De esta suerte hallamos el lugar geométrico de los puntos del plano representado de cota cero; es decir, su traza con el plano π , que pasará por la t_3 de la recta $a-c$, como comprobación.

Al unir todos los puntos de misma cota, por ejemplo, los de cota $(+1)$, de las tres rectas que forman el plano, los de cota $(+2)$, etc., lograremos una serie de horizontales de dicho plano, y la *línea de máxima pendiente*, MP , será aquella situada en él, cuyo intervalo sea mínimo; es decir, aquella recta que se proyecta perpendicular a la traza T del plano en cuestión, y que es conveniente señalar siempre mediante una doble línea para distinguirla de una recta cualquiera.

Alfabeto del plano. El plano puede ocupar tres posiciones relativas al plano de proyección π :

1.º Ser cualquiera, como acabamos de ver.

2.º Figura 70. El plano P es paralelo al plano π de proyección y entonces quedará representado por uno solo de sus puntos A de cota conocida: $a(+h_a)$.

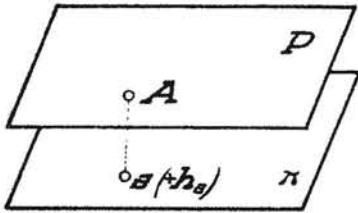


Fig. 70.—Sistema acotado: Plano paralelo al de representación.

3.º Figura 71. El plano es perpendicular al plano π de proyección, y entonces su línea de máxima pendiente MP es una recta de punto, representada por un solo punto mp , y se necesita conocer la traza T del plano para que quede debidamente representado.

Figura 71. El plano es perpendicular al plano π de proyección, y entonces su línea de máxima pendiente MP es una recta de punto, representada por un solo punto mp , y se necesita conocer la traza T del plano para que quede debidamente representado.

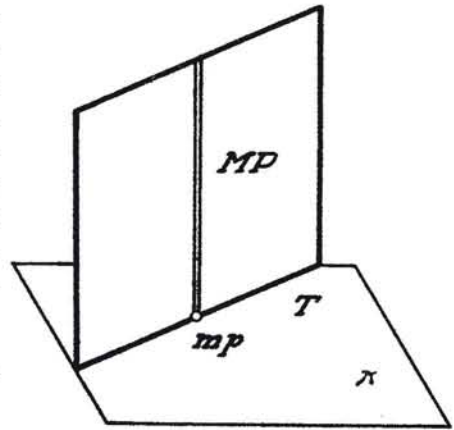


Fig. 71.—Sistema acotado: Plano perpendicular al de representación o proyectante.

Problema 1.º (Fig. 72.) *Situar un punto sobre una recta.*

Dada una recta mediante sus puntos $a(+h_a)$ y $b(+h_b)$, no solamente es preciso que la proyección p del punto se halle sobre la recta $\overline{a-b}$, sino que su cota no puede ser más que aquella que resulta de dividir

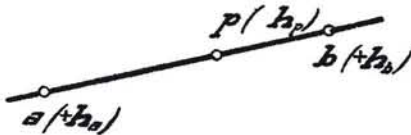


Fig. 72.—Sistema acotado: Situar un punto sobre una recta dada.

la diferencia de cotas de los puntos A y B proporcionalmente a los segmentos $\overline{a-p}$ y $\overline{p-b}$, hallándose de esa forma la cota (h_p) que le haya de corresponder.

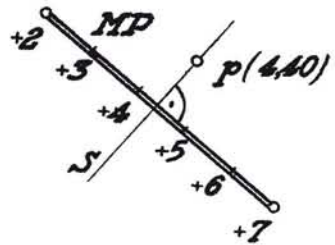


Fig. 73.—Sistema acotado: Situar un punto sobre un plano dado.

Problema 2.º (Fig. 73.) *Situar un punto sobre un plano.*

Tal plano viene representado por su línea de máxima pendiente MP , cuyas cotas extremas son $(+2)$ y $(+7)$. El punto p puede ser un punto cualquiera del plano de representación. La horizontal S que pasa por p será, como ya hemos visto en la figura 69, perpendicular a la línea de máxima pendiente, y ésta habrá de tener como altura en este caso $(+4,40)$, que es la cota única que ha de tener el punto P para estar situado en el plano en cuestión.

Problema 3.º Figura 74. *Situar una recta sobre un plano.*

Sea dado un plano por su línea de máxima pendiente MP de cotas (0) y $(+5)$.

Para que una recta r se halle situada en dicho plano, se precisará conocer las cotas de dos de sus puntos sobre él, repitiendo el problema anterior, habiendo utilizado en este caso la horizontal de altura (0) (la traza T) y la horizontal s de altura $(+5)$.

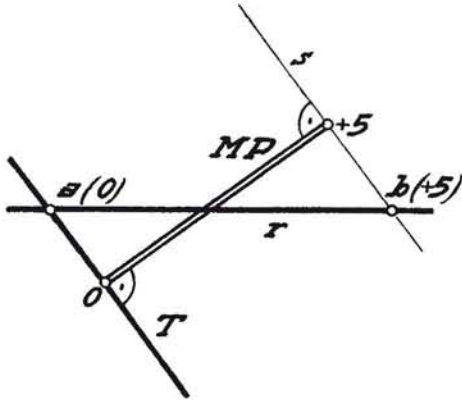


Fig. 74. — Sistema acotado: Situar una recta sobre un plano dado.

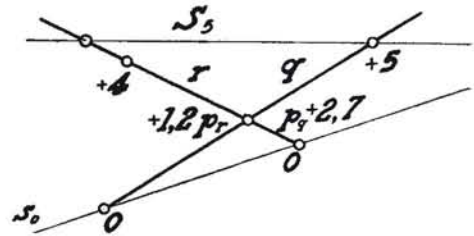


Fig. 75. — Sistema acotado: Analizar si dos rectas se cortan.

Problema 4.º (Fig. 75.) *Averiguar si dos rectas se cortan o se cruzan.*

Sean dos rectas r y q , de las que se tienen dos puntos en cada una situadas en ambas rectas, por ejemplo,

de ellas. Si las dos rectas se cortan, determinan un plano, y las horizontales de este plano habrán de ser paralelas. Por tanto, vamos a unir dos a dos, puntos de la misma cota situados en ambas rectas, por ejemplo, la horizontal S_0 y la S_5 , las cuales, como apreciamos en este caso, al no ser paralelas nos indican que las dos rectas no determinan un mismo plano, y entonces el punto en que se cortan las proyecciones r y q tendrán distinta cota, que apreciaremos al hallarlas separadamente en cada una de las rectas en cuestión.

Así, por ejemplo, el punto p_r , que representa estar situada sobre la recta r , tendrá por cota $(+1,2)$, y p_q tendrá como cota $(+2,7)$.

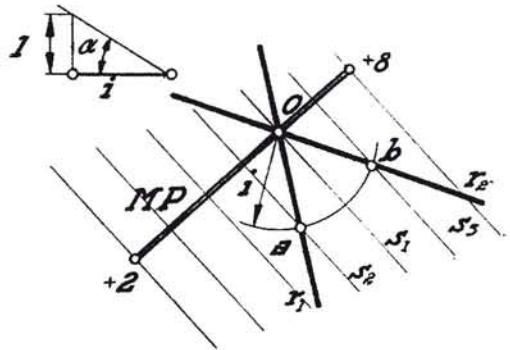


Fig. 76. — Sistema acotado: Situar sobre un plano dado una recta de pendiente determinada.

Problema 5.º (Fig. 76.) *Situar una recta de pendiente determinada sobre un plano dado.*

Sea dado el plano por su línea de máxima pendiente MP de cotas

(+ 2) y (+ 8), y sea asimismo α el ángulo de la pendiente de la recta que se trata de situar.

Empezaremos por hallar el intervalo i correspondiente a la recta en cuestión, construyendo un triángulo rectángulo de cateto 1 y cuyo ángulo opuesto sea α .

Trazadas dos horizontales cualesquiera s_1 y s_2 del plano en cuestión, a partir del punto O en que s_1 corta a la línea de máxima pendiente, trazaremos un arco de círculo de radio igual a i , que cortará a la horizontal s_2 en un punto a , que unido con O nos dará la posición de la recta pedida; por tanto, toda paralela a ella que tenga un punto común con el plano, será solución del problema.

Existe otra solución simétrica de la anterior, utilizando la horizontal s_3 , que nos da el punto b y viene dada por $\overline{b-O}$.

El problema tendrá solución cuando el intervalo i de la recta sea igual o mayor que el de la línea de máxima pendiente MP .

Problema 6.º (Fig. 77.)
Hacer pasar un plano de pendiente dada α por una recta R .

Empezaremos por determinar como en el caso anterior, el intervalo i de la línea de máxima pendiente del plano.

Elegido un punto de la recta: O de cota (+ 4), por ejemplo, trazaremos un arco de círculo de radio igual a i , y desde el punto m de la recta de cota (+ 4—1) = (+ 3), por ejemplo, trazaremos la tangente $s = \overline{m-n}$ a este círculo, con lo cual tendremos una horizontal del plano pedido y, por tanto, su línea de máxima pendiente MP , perpendicular a dicha horizontal s .

Existirá otra solución si, como en el caso presente, se pueden trazar dos tangentes desde m a la circunferencia de centro O y radio i .

Si m es un punto de dicho círculo sólo existirá una solución, siendo entonces la recta dada r , la línea de máxima pendiente solución.

Cuando m sea interior al círculo no habrá solución, pues ello indicará que la pendiente del plano habría de ser menor que la de la recta dada.

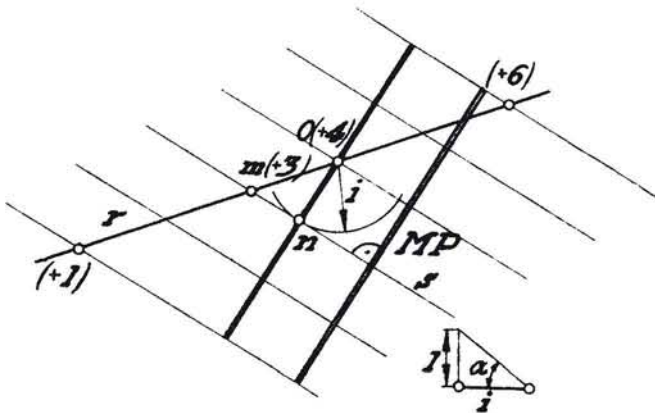


Fig. 77. — Sistema acotado: Hacer pasar por una recta dada un plano de pendiente conocida.

CAPITULO IV

SISTEMA DIÉDRICO

Representación y alfabeto del punto, de la recta y del plano.

Ya hemos visto (fig. 42.) que este sistema está integrado por dos planos ortogonales, uno horizontal H , otro vertical V , los que se hacen coincidir con el del dibujo, después de haber obtenido las proyecciones ortogonales respectivas de la figura del espacio.

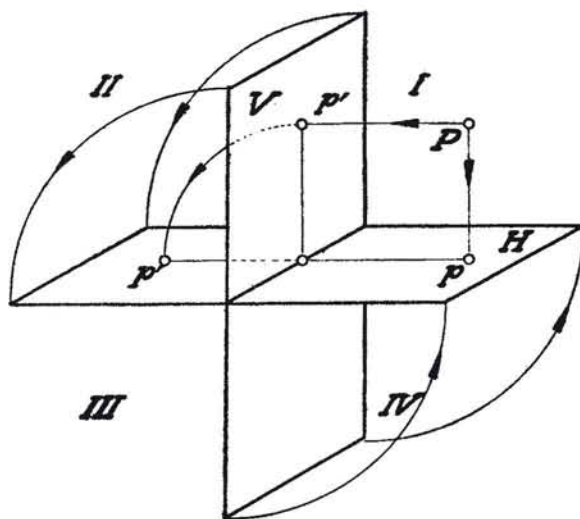


Fig. 78. — Sistema diédrico: Punto del I cuadrante.

Estos planos dividen al espacio en cuatro regiones llamadas cuadrantes, que se denominan I, II, III y IV cuadrantes. Generalmente se supone colocado el observador en el ∞ anterior al primer cuadrante, considerándose vistos los puntos situados en él.

Como ya sabemos representar un punto cualquiera, vamos a estudiar ahora el

Alfabeto del punto. *Punto del I cuadrante.* (Fig. 78.) Supongamos se trata de un punto P cualquiera del I cuadrante; después de efectuada la coincidencia de V con H como queda indicado en la figura de referencia, se obtiene en el plano del dibujo (fig. 79), la representación del punto en cuestión: $p-p'$, correspondiente al mencionado punto del espacio P situado en el I cuadrante.

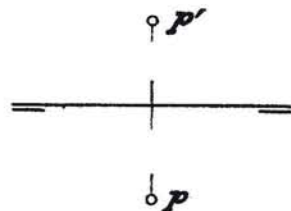


Fig. 79. — Sistema diédrico: Representación de un punto del I cuadrante.

La particularidad de esta posición común a todos los puntos situados en dicho I cuadrante es que su *proyección horizontal se halla siempre situada por debajo de la línea de tierra*, y que su *proyección vertical está por encima de ella*, entendiéndose por debajo el que la proyección horizontal se encuentra en el mismo lado que los trazos con que se subraya siempre la línea de tierra, diciéndose que la proyección vertical está por encima de ella cuando está situada tal y como se representa en la figura citada, al otro lado de dichos trazos.

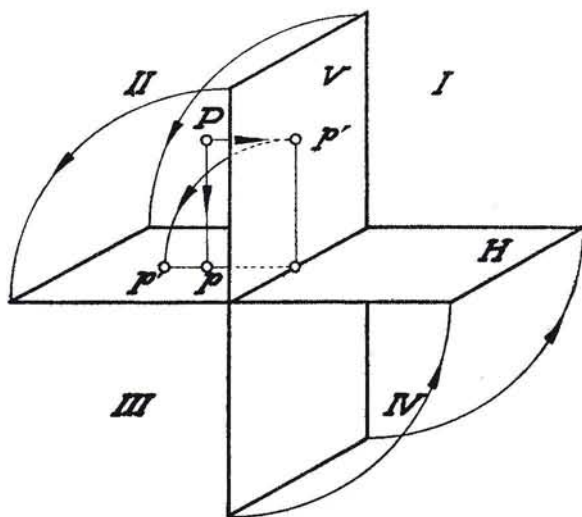


Fig. 80. — Sistema diédrico: Punto del II cuadrante.

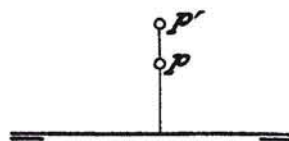


Fig. 81. — Sistema diédrico: Representación de un punto del II cuadrante.

Punto del II cuadrante. Figuras 80 y 81. Con los mismos elementos constitutivos del sistema diédrico especificado en relación con la figura anterior, vemos que el punto del II cuadrante P tiene sus proyecciones p' — p situadas de tal manera que ambas se encuentran por encima de la línea de tierra, considerándose este punto oculto en lo que se refiere a lo ya estipulado en relación con las partes vistas y ocultas enunciadas, apareciendo la representación de dicho punto en la figura 81, pudiendo estar la proyección horizontal p más alejada de la línea de tierra que la proyección vertical, o viceversa.

La condición, por ello, para que un punto representado en este sistema se halle en el II cuadrante, es que sus dos proyecciones se encuentran *ambas a distinto lado que los trazos de la línea de tierra*.

Punto del III cuadrante. Figuras 82 y 83. El punto P se proyecta ahora en la forma que se aprecia en la figura, viniendo a resultar

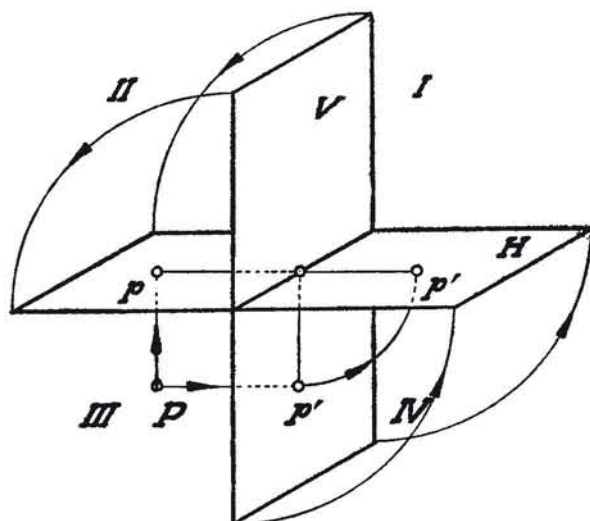


Fig. 82. — Sistema diédrico: Punto del III cuadrante.

su representación con sus dos proyecciones cambiadas, si las comparamos con el punto del I cuadrante, estando la proyección horizontal p por encima de la línea de tierra, y la proyección

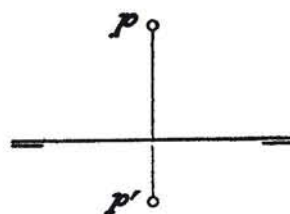


Fig. 83. — Sistema diédrico: Representación de un punto del III cuadrante.

vertical p' por debajo de ella, circunstancia que podíamos haber previsto al darnos cuenta de que todo lo que sucede en el III cuadrante es inverso de lo que acontece en el I.

El punto del III cuadrante $p-p'$ será también punto oculto.

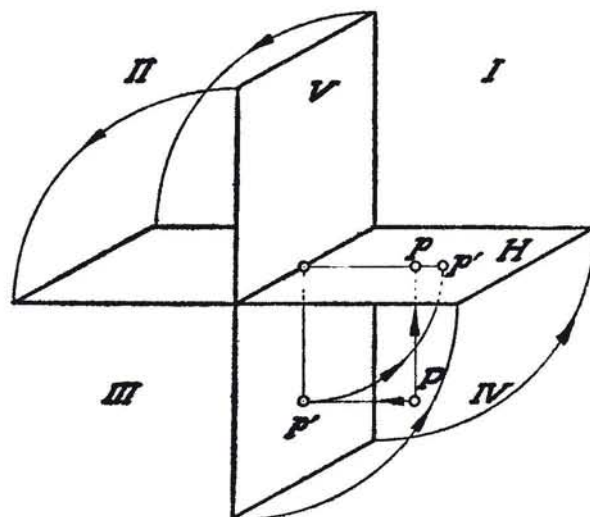


Fig. 84. — Sistema diédrico: Punto del IV cuadrante.

Punto del IV cuadrante. (Figs. 84 y 85.) El punto P ahora se proyecta en $p-p'$; es

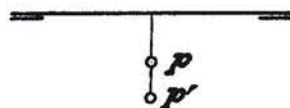


Fig. 85. — Sistema diédrico: Representación de un punto del IV cuadrante.

decir, hallándose las dos proyecciones p y p' ambas por debajo de la línea de tierra, lo cual es también lo contrario de lo que sucede con el

punto del II cuadrante, pudiendo asimismo suceder que la posición relativa de p y de p' con respecto a la línea de tierra sea cualquiera, con tal de que efectivamente estén ambas en el *mismo lado de los trazos* de la línea de tierra.

Además de estas cuatro existen otras posiciones del punto con respecto a este sistema, que aparecen en las figuras 86 y 87, donde además de los planos de proyección H y V , figuran los bisectores B_1 y B_2 , que llamaremos bisector 1.º y bisector 2.º, por serlo de los cuadrantes I—III y II—IV, respectivamente. Entonces, las distintas posiciones que puede ocupar un punto, además de las generales ya

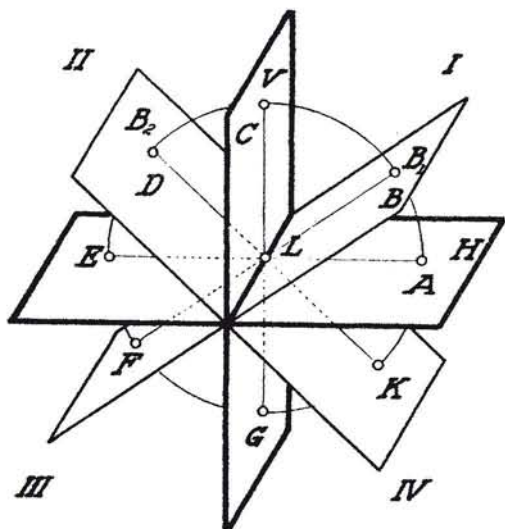


Fig. 86. — Sistema diédrico: Diversas posiciones del punto con relación a los planos de proyección y a sus bisectores.

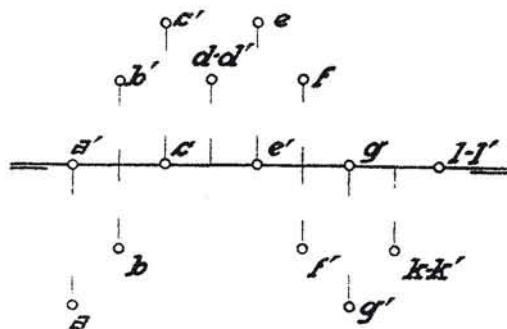


Fig. 87. — Sistema diédrico: Representación de los puntos de la figura anterior.

vistas en las figuras anteriores, son las que aparecen en esta figura con respecto de los planos de proyección y de sus bisectores; es decir, que los puntos señalados en la figura 86, $A—B—C—D—E—F—G—K—L$, se hallan debidamente representados en el plano del dibujo, según indica la figura 87.

En ellas se aprecian las siguientes particularidades:

Punto $a—a'$, correspondiente a A de la figura 86.

Es un punto del plano horizontal H cuya proyección vertical a' se halla en la línea de tierra, pues como sabemos su altura es cero; es decir, que el segmento comprendido entre la proyección vertical a' y la línea de tierra se hace nulo. (Véase fig. 78.)

El punto $E—e—e'$ también es del plano horizontal H ; pero resulta oculto por hallarse detrás del plano vertical V .

Como resumen, diremos que todo punto cuya proyección vertical se halla en la línea de tierra, corresponde a un punto del espacio coincidente con el plano horizontal de proyección.

Pasemos ahora al punto $B-b-b'$, situado en el primer plano bisector B_1 .

El tal punto, por estar en el I cuadrante, ha de hallarse de tal forma que sus proyecciones se encuentren en la misma posición relativa que las correspondientes al punto $p-p'$ señalado en las figuras 78 y 79; es decir, que su proyección horizontal se encuentra por debajo de la línea de tierra, y su proyección vertical por encima, con la particularidad de que las *distancias de ambas proyecciones a la línea de tierra son iguales*.

En la misma situación se halla el punto $f-f'$ del mismo plano bisector B_1 ; pero que, por hallarse en el III cuadrante, está en posición inversa que la del $b-b'$, siendo no obstante iguales las distancias de sus proyecciones a la línea de tierra. Téngase presente las figuras 82 y 83, que representan, en general, un punto del III cuadrante.

$C-c-c'$, situado en el plano vertical, tiene por proyección horizontal c , un punto de la línea de tierra, por una consideración análoga a la hecha en relación con el punto $a-a'$; es decir, que sabiendo que el segmento que separa la proyección horizontal de la línea de tierra nos mide su distancia al plano vertical, en el caso presente se hace nulo y hace que c se halle sobre la línea de tierra.

En la misma situación se halla el punto $G-g-g'$, en que se observa que g está también en la línea de tierra, no obstante hallarse el punto entre los III y IV cuadrantes, por lo cual goza de ambas propiedades; es decir, que su proyección vertical g' se encuentra por debajo de la línea de tierra; podemos concretar el que: *para que un punto esté situado en el plano vertical, basta observar la posición de su proyección horizontal, la cual ha de hallarse situada sobre la línea de tierra*.

El punto $D-d-d'$ es un punto del segundo plano bisector, que por hallarse en el II cuadrante (véanse figs. 80 y 81) ha de tener sus dos proyecciones por encima de la línea de tierra; pero coincidiendo la circunstancia de hallarse en el plano bisector, sus distancias al plano vertical V y al plano horizontal H son las mismas, por lo que al efectuar la coincidencia del plano vertical con el plano horizontal las dos proyecciones quedan confundidas tal y como viene representado en la figura 87.

Lo mismo sucede con relación al punto $k-k'$, que tiene la doble particularidad de hallarse en el plano bisector 2.º, de un lado, y de otro, el que al estar situado en el IV cuadrante tiene sus proyecciones confundidas y por debajo de la línea de tierra. Podemos, por tanto, establecer como regla el que: *para que un punto del espacio esté situado en el segundo plano bisector, será condición precisa el que sus proyecciones diédricas estén confundidas, hállese este punto en el II o en el IV cuadrante*.

Finalmente, si un punto $l-l'$ estuviere situado sobre la línea de

tierra, lógicamente sus proyecciones quedarán confundidas también en la línea de tierra, puesto que este punto goza de las propiedades de todos los anteriores.

Resumiendo: Todas las posiciones posibles del punto con relación a los planos de proyección y a sus bisectores, son: cuatro generales, una en cada cuadrante (figs. 78, 80, 82 y 84) y nueve particulares, que vienen representadas en la figura 86; en total, 13 posiciones distintas de un punto, con lo cual queda completado su alfabeto en este sistema.

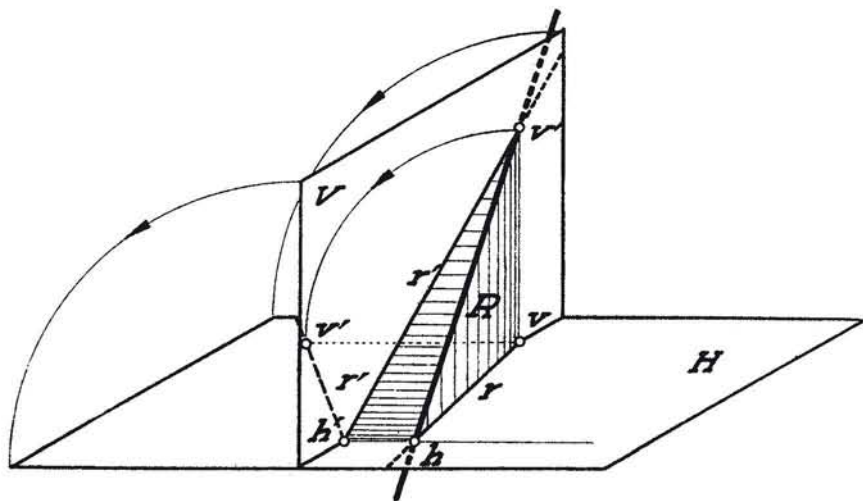


Fig. 88. — Sistema diédrico: La recta y sus trazas.

Representación de la recta. Figura 88. Hemos visto que la recta está representada mediante dos de sus puntos (fig. 38) y, por consiguiente, será una recta para cada una de sus proyecciones.

La recta R tendrá por proyecciones: r horizontal y r' vertical, que serán las trazas de sus planos proyectantes con los de proyección, teniendo lugar la, al parecer, paradójica, de que el plano proyectante horizontal $R-r$ es vertical, por ser perpendicular al plano horizontal. Esta denominación se debe al hecho de que el *proyectante horizontal* origina la *proyección horizontal* r de la recta.

Lo propio sucede con el plano *proyectante vertical*, que no es horizontal, sino perpendicular al plano vertical de proyección (señalado en la figura por las rectas $R-r'$), y que produce la *proyección vertical* r' de la recta.

Existen, sin embargo, varios puntos notables de esta recta, que con más frecuencia vamos a utilizar: son sus trazas con los planos de proyección; es decir, la traza horizontal $h-h'$ y la traza vertical $v-v'$.

Estos puntos se hallan situados, como su nombre lo indica, en los planos de proyección, y vamos a ver de lograrlos en el sistema de representación cuando conozcamos la recta dada por sus proyecciones.

Figura 89. Sea la recta $r-r'$ representada por dos rectas cualesquiera.

La forma de conseguir la traza horizontal es bien sencilla si tenemos en cuenta la particularidad de que ha de ser el punto de la recta situado en el plano horizontal; es decir, el punto que se halla en las mismas circunstancias que los $a-a'$ o $e-e'$ de la figura 87; o, dicho de otro modo, el punto de la recta de *altura cero*. Las alturas de los puntos hemos visto se miden por las distancias que separan su proyección vertical de la línea de tierra, por lo cual, el punto de altura cero será el que nos determine la intersección de la proyección vertical r' con la línea de tierra, es decir, h' , que se refiere a la proyección horizontal r , dándonos lugar a su proyección horizontal h .

Por consideraciones análogas conseguiremos el punto de distancia cero al plano vertical; es decir, el punto de encuentro de r con la línea de tierra, o sea v , el cual se referirá en v' sobre r' .

Además de estos dos puntos que van a desempeñar un papel importantísimo cuando manejemos la recta en este sistema, existen otros dos puntos que también tienen alguna importancia, y son los puntos $b_1-b'_1$ y $b_2-b'_2$, trazas de la recta en cuestión con los planos bisectores 1.^o y 2.^o, respectivamente.

La forma de conseguir estos puntos es también muy sencilla, pues basta recordar las propiedades que tienen y que quedan de manifiesto en la figura 87 (puntos $b-b'$ y $d-d'$ o $f-f'$ y $k-k'$). Siendo el punto del primer plano bisector aquel cuyas proyecciones equidistan de la línea de tierra, y que además se hallan sobre las proyecciones homónimas de la recta $r-r'$, bastará trazar por h' una recta que forme el mismo ángulo α que forma r' con la línea de tierra, lo que dará lugar al punto pedido $b_1-b'_1$. Téngase en cuenta que también pudiéramos haber trazado desde v una recta que formara el ángulo β con la línea de tierra igual al que forma r con la misma, pues sólo se trata de resolver un problema de carácter gráfico, sin que tenga, de momento, relación alguna con el espacio.

En cuanto al punto $b_2-b'_2$, traza de la recta con el plano bisector 2.^o, por haber de tener éste sus proyecciones confundidas, bastará

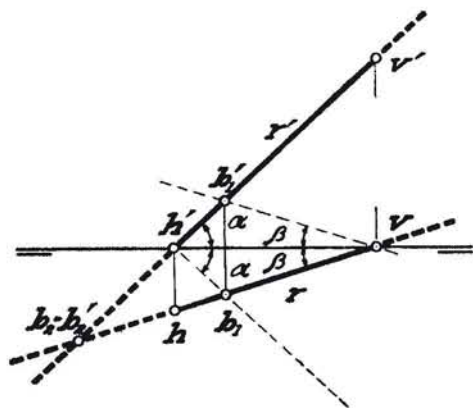


Fig. 89. — Sistema diédrico: Representación de la recta.

determinarlas como punto de intersección de las dos proyecciones de la recta.

Obsérvese que las dos series b_1-h-b_1-v y $b'_1-h'-b'_1-v'$ son armónicas.

Determinación de las partes vista y oculta de una recta cualquiera. (Fig. 90.)

Sea una recta cualquiera $r-r'$.

Bastará observar la posición relativa de la recta con respecto a los cuadrantes, teniendo presente que una recta podrá, como máximo, en su extensión infinita, tener regiones comunes con tres cuadrantes, considerando únicamente como parte vista aquella que está en el I cuadrante, y ocultas las demás.

Esto nos indica ya el procedimiento a seguir para representar convenientemente la recta, que deberá ser de trazo lleno en su parte vista del I cuadrante, y de trazo discontinuo en los demás.

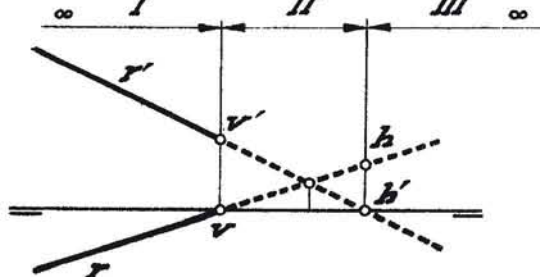


Fig. 90. — Sistema diédrico: Partes vistas y ocultas de una recta.

Para ello, y como los puntos que nos indican los pasos de un cuadrante a otro son las trazas de una recta, o sea sus puntos comunes con los planos de proyección, bastará hallar las trazas de la misma y analizar la posición de los puntos de los distintos segmentos que de tal forma vienen separados.

Así, por ejemplo, empezaremos por la parte izquierda de la recta, que desde el infinito llega hasta su traza vertical $v-v'$:

Todos los puntos de la recta están en una situación análoga a la correspondiente a las figuras 78 y 79; es decir, que son puntos del I cuadrante por estar su proyección horizontal por debajo de la línea de tierra, y su proyección vertical por encima de ella.

El segmento comprendido entre la traza vertical $v-v'$ y la horizontal $h-h'$ está caracterizado porque todos sus puntos se hallan en la misma situación que los representados en las figuras 80 y 81; es decir, que son del II cuadrante por hallarse situadas sus dos proyecciones por encima de la línea de tierra. Este segmento será, por tanto, oculto.

Finalmente, el segmento comprendido entre la traza horizontal $h-h'$ y el infinito, tiene todos sus puntos en la misma posición relativa que los correspondientes a las figuras 82 y 83; es decir, del III cuadrante. También este segmento se representará oculto.

Nunca sucederá que un segmento aislado de recta sea representado visto en una proyección y oculto en la otra, o viceversa.

Cualquiera que sea la recta, este es el proceso general a seguir para delimitar sus partes vistas y ocultas.

Alfabeto de la recta. Llámase alfabeto de la recta a la representación de las posiciones relativas de la recta con respecto a los planos de proyección.

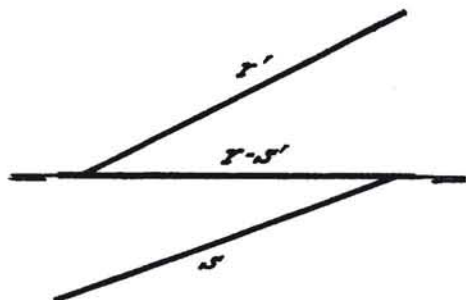


Fig. 91. — Sistema diédrico: Rectas situadas en los planos de proyección.

está situada en el plano vertical, y por tanto, dada la particularidad de todos sus puntos de tenerse que proyectar sobre la línea de tierra (fig. 87, punto $c-c'$), su proyección horizontal r se confunde con ella en su totalidad.

De la misma forma, la recta S situada en el plano horizontal tiene su proyección vertical s' confundida con la línea de tierra.

Recta situada en un plano de proyección. (Fig. 91.) La recta $r'-r$

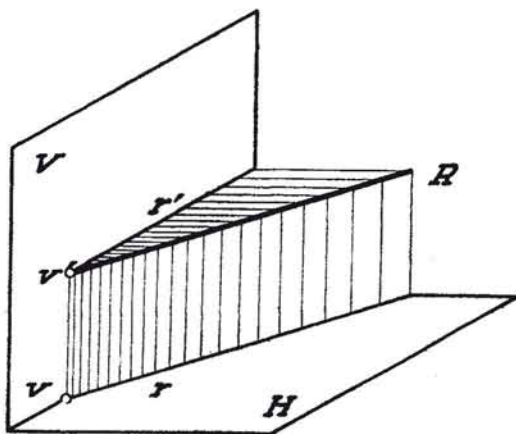


Fig. 92. — Sistema diédrico: Recta horizontal.

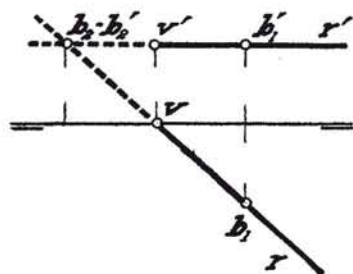


Fig. 93. — Sistema diédrico: Representación de una horizontal.

Recta horizontal. (Fig. 92.)

La recta R , paralela al plano horizontal, tiene como particularidad el que todos sus puntos se hallan a la misma altura, con lo cual queda indicado la forma en que se ha de conseguir su proyección vertical r' : paralela a la línea de tierra, pudiendo ser su proyección horizontal r cualquiera; tal es el caso de la figura 93, donde viene representada esta horizontal: $r-r'$.

Se observa que la traza horizontal es el punto impropio de esta recta, puesto que ya hemos visto que h' es siempre el punto de encuentro de r' con la línea de tierra.

En cuanto a la traza vertical $v-v'$, la obtendremos del mismo modo que en casos anteriores; es decir, hallando v , común a la proyección

horizontal r y a la línea de tierra, por ser el punto de alejamiento nulo al plano vertical, y refiriendo luego v' sobre r' .

El punto del segundo plano bisector $b_2-b'_1$, es asimismo el punto doble; es decir, de encuentro de las dos proyecciones, y el punto del primer plano bisector será el $b_1-b'_2$, que se hallará tomando $b_1-v = b_2-v$, por ser v conjugado armónico del punto impropio con respecto a b_1 y b_2 ; es decir, punto medio del segmento b_1-b_2 , sucediendo lo mismo con v' respecto de b'_1 y b'_2 .

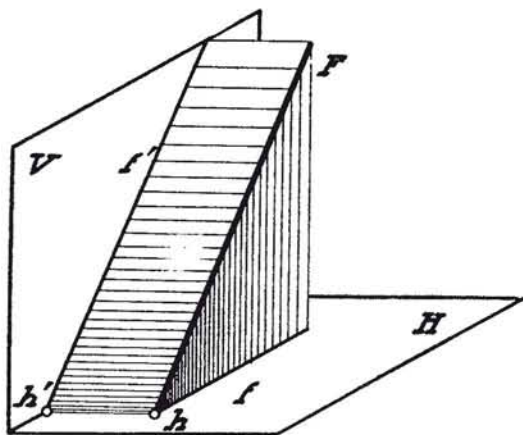


Fig. 94. — Sistema diédrico: Recta vertical o frontal.

Recta vertical o frontal. (Figura 94.)

La recta F se denomina frontal o vertical por ser paralela al plano vertical de proyección, advirtiendo que tal denomina-

ción no implica el que la recta sea efectivamente vertical, sino *paralela al plano vertical de proyección*.

Esta recta carece, como es lógico, de traza vertical; o mejor dicho,

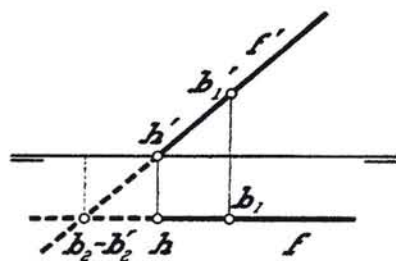


Fig. 95. — Sistema diédrico: Representación de una vertical o frontal.

su traza vertical es su punto impropio, pues su característica es que todos sus puntos se hallen a la misma distancia

de dicho plano vertical de proyección.

En la figura 95 viene representada esta recta $f-f'$ en el sistema de proyección, y se pueden hacer extensivas las mismas observaciones que las hechas con relación a la recta horizontal, si bien invirtiendo los términos.

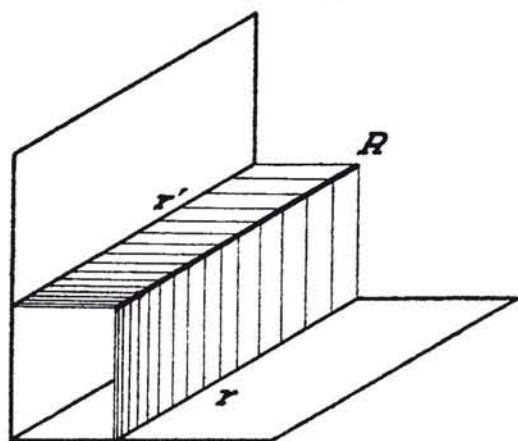


Fig. 96. — Sistema diédrico: Recta paralela a la línea de tierra.

Recta paralela a la línea de tierra. (Fig. 96.) La recta R , por ser paralela a la línea de tierra, goza de las propiedades comunes a la hori-

zontal y a la frontal; es decir, se trata de una recta cuyos puntos están todos igualmente alejados del plano horizontal y del plano vertical, o lo que es lo mismo, de la línea de tierra, motivo por el cual carecerá de trazas sobre dichos planos, siendo su representación la que aparece en la figura 97; sus proyecciones $r-r'$ son paralelas a la línea de tierra.

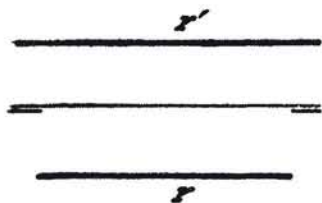


Fig. 97. — Sistema diédrico: Representación de una recta paralela a la línea de tierra.

Recta de punta. (Fig. 98.) Se llama *recta de punta* a aquella que es perpendicular a un plano de proyección; o dicho de otro modo, a la que sigue la dirección proyectante.

Como estas direcciones son dos, también existen dos posiciones de la recta de punta: la R , perpendicular al plano horizontal H , y la recta S , perpendicular al plano vertical V .

Fácilmente se comprende que todos los puntos de la recta R tienen la misma proyección horizontal r ; es decir, que esta recta se proyecta horizontalmente según un punto, lo cual viene así dibujado en la

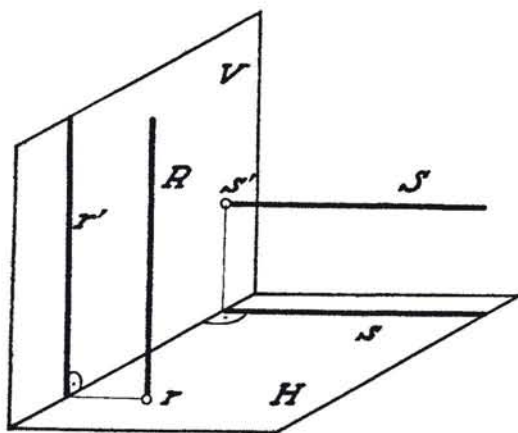


Fig. 98. — Sistema diédrico: Rectas de punta.

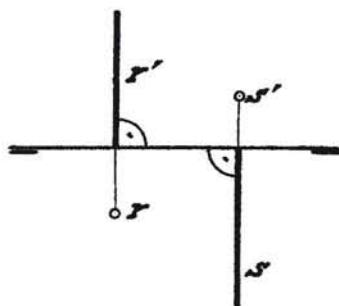


Fig. 99. — Sistema diédrico: Representación de las rectas de punta.

figura 99, observándose, además, que la proyección vertical r' de esta recta es perpendicular a la línea de tierra.

Lo mismo diremos, aunque inversamente, de la recta S , cuya proyección vertical es un punto s' , y su proyección horizontal s , perpendicular a la línea de tierra.

Téngase presente que la recta R es un caso particular de la frontal o vertical, siéndolo estrictamente en este sentido. También la recta S es un caso particular de la horizontal.

Recta que pasa por la línea de tierra. (Figs. 100 y 101.)

Esta recta, al pasar por la línea de tierra, da lugar a que sus planos proyectantes pasen también por el punto común a la línea de tierra, motivo por el cual sus proyecciones r y r' han de pasar por el mismo punto de la

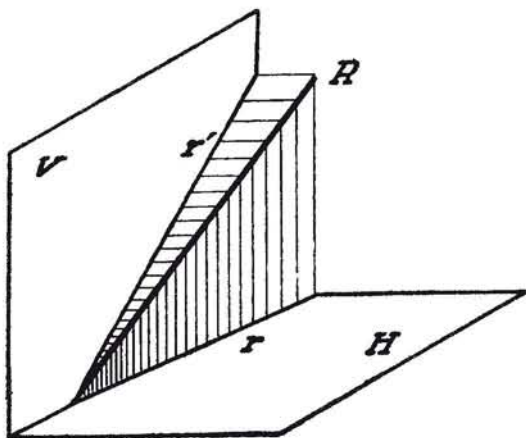


Fig. 100. — Sistema diédrico: Recta que corta a la línea de tierra.

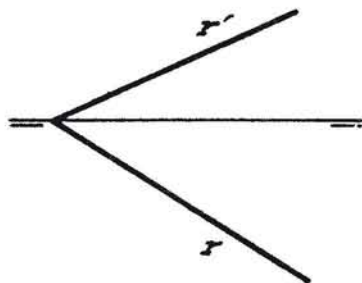


Fig. 101. — Sistema diédrico: Representación de una recta que corta a la línea de tierra.

misma para que corresponda su representación a la recta del espacio.

Este punto representa las dos trazas de la recta confundidas. (Véase el punto L de las figs. 86 y 87.)

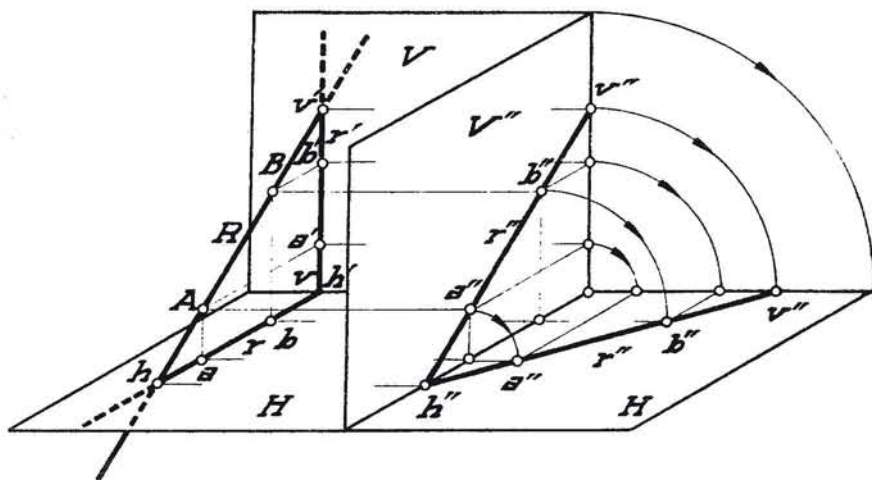


Fig. 102. — Sistema diédrico: Recta de perfil y plano vertical segundo.

Recta de perfil. (Fig. 102.)

Esta recta R está situada de tal manera que sus dos planos proyectantes se hallan confundidos, resultando así indeterminada al no co-

nocer más que sus proyecciones (fig. 103), por ser ambas perpendiculares a la línea de tierra y venir, por tanto, confundidas: $r-r'$.

Esto, al parecer, podría indicarnos el que la recta tuviera sus proyecciones confundidas; es decir, que fuera una recta del segundo plano bisector, y esto motiva el que se tenga que definir la recta de perfil

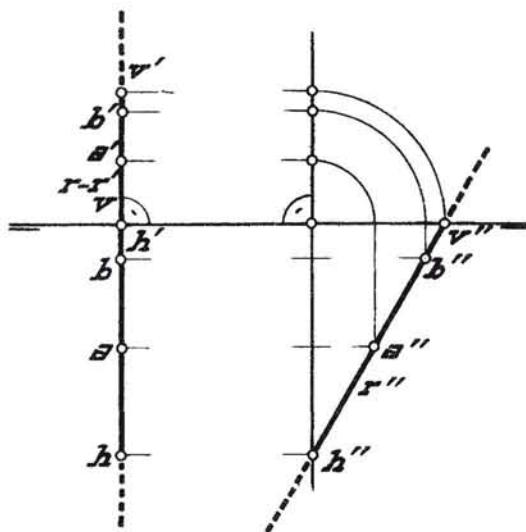


Fig. 103. — Sistema diédrico: Representación de la recta de perfil con su proyección vertical segunda.

mediante las proyecciones de dos cualesquiera de sus puntos, tales como A y B , mediante sus proyecciones $a-a'$ y $b-b'$. Para determinar con sencillez las trazas de una recta de perfil recurriremos a la llamada *proyección vertical segunda*, que va a consistir en utilizar un plano auxiliar de proyección V'' que sea perpendicular a la línea de tierra, haciendo después su coincidencia con el plano horizontal de proyección H , es decir, con el plano del dibujo, en la misma forma que se hizo con el plano vertical de proyección V . De la sola inspección de ambas figuras se desprende la forma de conseguir los puntos, trazas $h-h'$ y $v-v'$, después del conocimiento de los h'' y v'' .

Recta del segundo plano bisector.
(Fig. 104.)

Es una recta cualquiera cuyas proyecciones $r-r'$ se confunden por ser dobles todos los puntos que contiene.

Las trazas de esta recta se hallan en un solo punto de la línea de tierra.

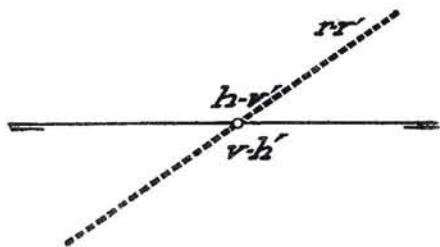


Fig. 104. — Sistema diédrico: Representación de una recta del segundo plano bisector.

Esta recta es un caso particular del que se representa en las figuras 100 y 101, y es totalmente oculta por serlo todos los puntos del segundo plano bisector.

Recta del primer plano bisector. (Fig. 105.)

Es una recta que pasa por la línea de tierra, formando sus proyecciones $r-r'$ el mismo ángulo α con la línea de tierra, lo cual está motivado porque todos sus puntos han de tener sus proyecciones equidistantes de la línea de tierra; es decir, que ésta es el eje de simetría de las dos proyecciones.

Como el primer plano bisector lo es del I y III cuadrantes, una parte de la recta será vista y la otra oculta a partir de la línea de tierra, por corresponder a puntos situados en el III cuadrante.

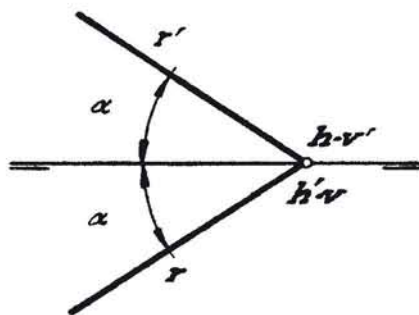


Fig. 105. — Sistema diédrico: Representación de una recta del primer plano bisector.

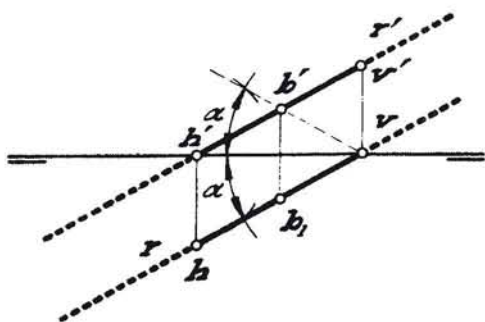


Fig. 106. — Sistema diédrico: Representación de una recta paralela al segundo plano bisector.

Recta paralela al segundo plano bisector. (Fig. 106.)

Esta recta ha de tener su traza con el plano bisector segundo, es decir, el punto $b_2-b'_2$ impropio, y como este punto ya hemos visto se halla en la intersección de las dos proyecciones, éstas necesariamente habrán de ser paralelas, pudiendo tener esta recta $r-r'$ una parte vista y dos ocultas, tal como viene representado en la figura de referencia.

En la parte vista se halla su traza $b_1-b'_1$ con el primer plano bisector, punto medio del segmento $h-v-h'-v'$.

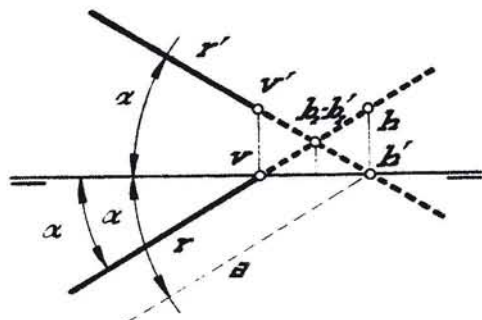


Fig. 107. — Sistema diédrico: Representación de una recta paralela al primer plano bisector.

Recta paralela al primer plano bisector. (Fig. 107.)

Si la proyección vertical de esta recta, por ejemplo, forma el ángulo α con la línea de tierra, y repitié-

ramos la operación que aparece al hablar de la figura 89 para la determinación de su traza $b_1-b'_1$ con el primer plano bisector, veremos que

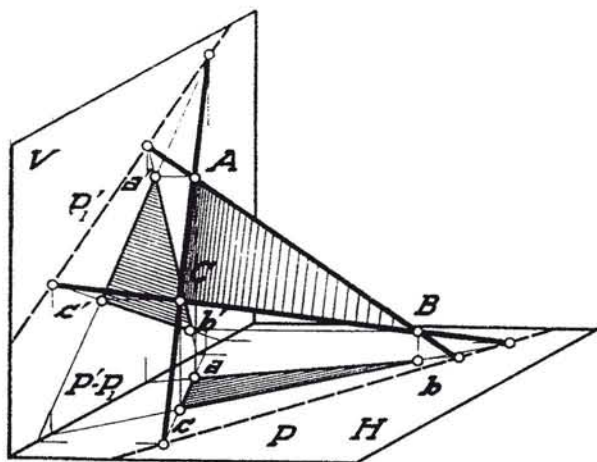


Fig. 108. — Sistema diédrico: Plano determinado por tres puntos.

al trazar por h' la recta a simétrica de r' con respecto a la línea de tierra, ésta debe cortar a r en el punto impropio, por lo que r habrá de formar el mismo ángulo α que r' con la línea de tierra, para que se cumpla la condición exigida.

Representación del plano.

(Fig. 108.)

Sabemos que el plano está determinado por tres puntos: Sean estos puntos $A-B-C$; por consiguiente

te, si en el plano del dibujo (fig. 109) tenemos tres puntos representados $a-a'$, $b-b'$, $c-c'$, éstos nos individualizarán la posición de un plano que queda por ello sólo representado. Sin embargo, en vista de las ulteriores aplicaciones, el plano habrá de manejarse, y ello nos será engorroso al tener que operar con tales tres puntos, motivo por el cual recurriremos a representar el mismo plano mediante dos rectas que contenga, y el par de rectas que más ventajas nos ofrece es el que está constituido por las trazas de este plano, es decir, por la recta $P-P'$ situada en el plano horizontal de proyección H , y por la recta $P_1-P'_1$ situada en el plano vertical de proyección V .

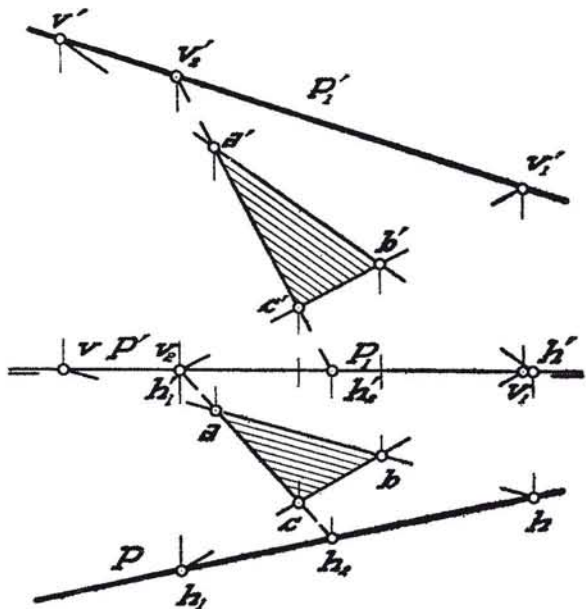


Fig. 109. — Sistema diédrico: Representación de un plano determinado por tres puntos.

Veamos cómo se puede conseguir sobre el plano del dibujo (fig. 109) la determinación de este par de rectas $P-P'$ y $P_1-P'_1$, con el conoci-

miento de los tres puntos $A—B—C$ que definen el plano en cuestión.

Es indudable que la traza de un plano con otro es el lugar geométrico de las trazas de todas las rectas que contiene, y esto nos indica ya la forma de conseguir dichas trazas.

Por ejemplo: elegida la recta $a—b$, $a'—b'$, hallaremos sus trazas $v—v'$ y $h—h'$ en la forma sabida.

Seguidamente elegiremos otra recta, por ejemplo, $b—c$, $b'—c'$, y también hallaremos sus trazas $v_1—v'_1$ y $h_1—h'_1$.

La unión de las proyecciones homónimas de estas trazas de las dos rectas nos darán las trazas del plano; es decir, que P estará determinada por $h—h_1$ y P' por $h'—h'_1$ = línea de tierra; y $v'—v'_1$ formarán P'_1 hallándose $P_1 = v—v' =$ línea de tierra. En resumen: el plano

vendrá representado por dos rectas cualesquiera $P—P'_1$, con la única condición de que se corten en el mismo punto de la línea de tierra, hallándose sus proyecciones contrarias P' y P_1 sobre ella.

Como comprobación, las trazas $h_2—h'_2$ y $v_2—v'_2$ habrán de hallarse sobre las trazas homónimas del plano.

Nota: Es una coincidencia fortuita el que v_2 coincida con h'_1 en la línea de tierra.

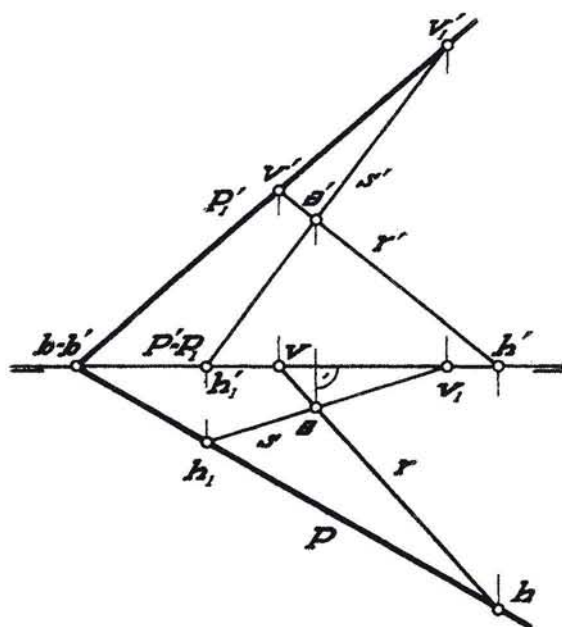


Fig. 110. — Sistema diédrico: Representación de un plano determinado por dos rectas que se cortan.

Plano determinado por dos rectas que se cortan. (Fig. 110.)

La condición necesaria para que se corten dos rectas cualesquiera, representadas en el sistema diédrico $r—r'$ y $s—s'$, es que las dos proyec-

ciones homónimas se corten en puntos $a—a'$, proyecciones de un punto del espacio. Cumplida esta condición, bastará determinar las trazas del plano en la misma forma que lo hemos hecho en el caso de la figura 109, es decir: P , que es la $h—h_1$, y P'_1 , que es la recta $v'—v'_1$, las cuales, como comprobación, se cortarán en el mismo punto de la línea de tierra $b—b'$.

Como siempre ha de suceder que P' y P_1 se hallen en la línea de tierra, se podrán omitir estas dos letras y representar el plano única-

mente mediante las rectas P y P' , trazas horizontal y vertical, respectivamente, anotándose en esta forma a fin de evitar confusiones ulteriores, en vez de: plano $P-P'$.

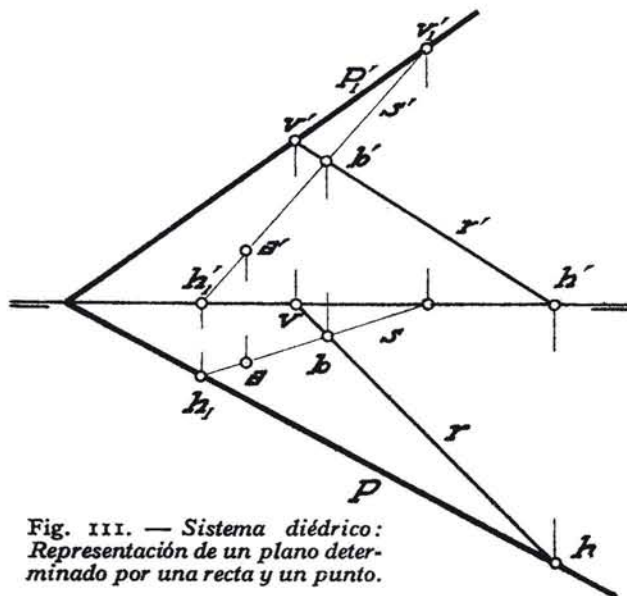


Fig. 111. — Sistema diédrico: Representación de un plano determinado por una recta y un punto.

Plano determinado por una recta y un punto. (Figura 111.)

Sean la recta $r-r'$ y el punto $a-a'$, que determinan un plano cuyas trazas vamos a conseguir.

Por de pronto, las trazas del plano habrán de pasar por las de la recta $r-r'$, es decir, por h y v' , respectivamente.

Elegido un punto cualquiera $b-b'$ de la recta $r-r'$, lo uniremos con el dado $a-a'$, y así tendremos

otra recta $s-s'$ que por hallarse situada en el plano cuyas trazas buscamos (dos puntos comunes con él) nos reducirá el caso al representado en la figura 110; lograremos los puntos h_1 y v'_1 , que nos sitúan las trazas P y P'_1 del plano en cuestión.

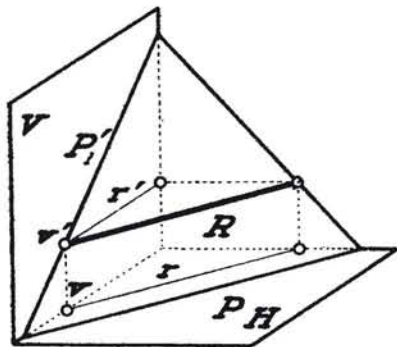


Fig. 112. — Sistema diédrico: Horizontal del plano.

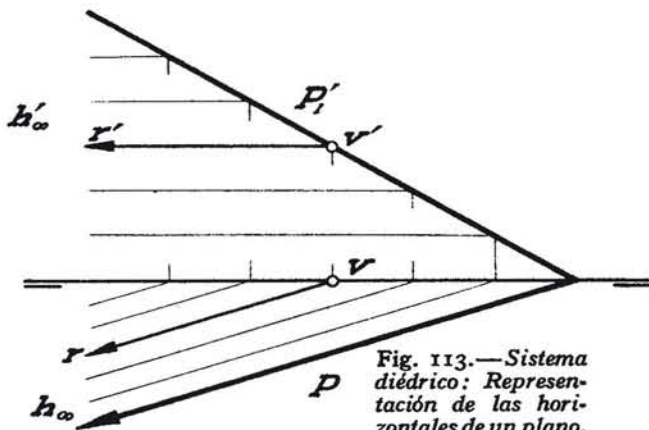


Fig. 113. — Sistema diédrico: Representación de las horizontales de un plano.

Horizontal del plano. (Figs. 112 y 113.) Por desempeñar un papel importante en el manejo del plano, hago mención de la *horizontal del plano*; es decir, de una de sus rectas, tal que $r-r'$, la cual, hallándose situada en el plano, se mantiene a una altura constante sobre el horizontal de proyección. (Véanse figs. 92 y 93.)

Basta tener presente la característica de esta horizontal para ver que r' ha de ser paralela a la línea de tierra, y que r ha de resultar paralela a la traza horizontal P del plano, y que su posición exacta se logra sabiendo además que su traza vertical $v-v'$ ha de ser un punto de la traza vertical del plano P' ; por tanto (fig. 113), trazada la proyección vertical r' , se hallará el punto v' , que se referirá a la línea de tierra v (por ser un punto del plano vertical), y desde él trazaremos r , paralela a P .

Así, pues, podemos considerar al plano $P-P'$ como un haz de rectas horizontales, obtenidas en la forma antedicha.

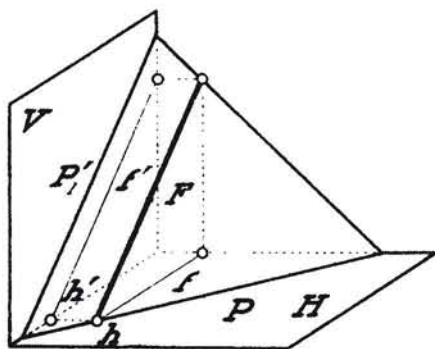


Fig. 114. — Sistema diédrico: Vertical o frontal del plano.

Frontal o vertical del plano. (Figs. 114 y 115.)

Por consideraciones análogas haremos intervenir la *frontal o vertical del plano*, que es la paralela al plano vertical de proyección V .

Esta frontal F sabemos ha de tener su traza vertical impropia. Por tanto, su proyección horizontal f ha de ser paralela a la línea de tierra, como queda expresado en las figuras 94 y 95.

Por consiguiente, teniendo a la vista la figura 115, lograda la proyección horizontal f hallaremos su traza horizontal $h-h'$ en la forma sabida, por ser un punto de P , y desde h' trazaremos la paralela a P' .

También podemos considerar al plano como un haz de rectas, frontales o verticales, obtenidas en la forma indicada.

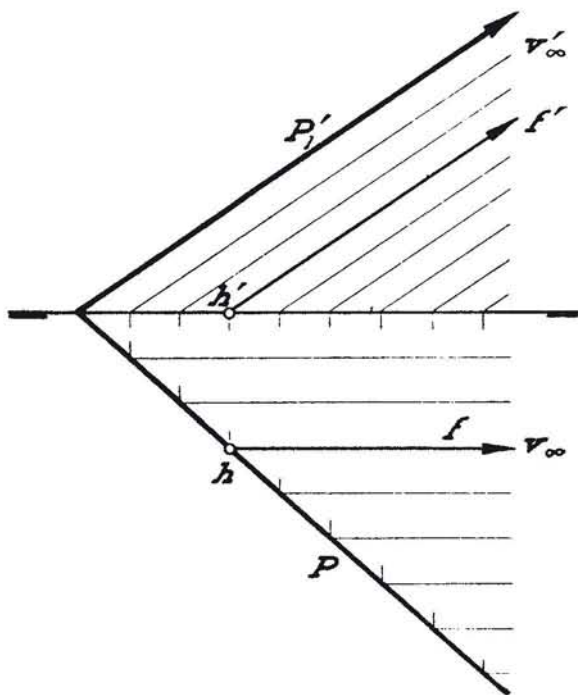


Fig. 115. — Sistema diédrico: Representación de las verticales o frontales de un plano.

Alfabeto del plano. (Figuras 116 y 117.)

Plano paralelo al vertical de proyección.

La sola inspección de las figuras nos indica que el plano en cuestión

carece de traza vertical, y que solamente tiene traza horizontal P , que por tal motivo ha de ser paralela a la línea de tierra.

Si el plano paralelo al vertical lo fuere por detrás de él, es decir, atravesara los cuadrantes II y III, su traza horizontal también sería paralela a la línea de tierra; pero se representaría oculta; es decir, de trazo discontinuo.

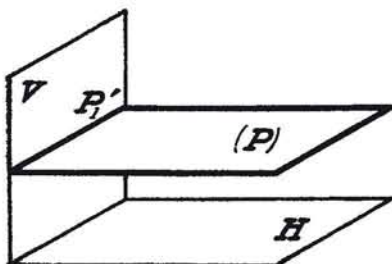


Fig. 116. — Sistema diédrico: Plano paralelo al vertical de proyección.

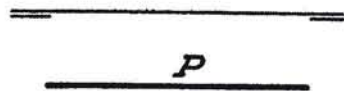


Fig. 117. — Sistema diédrico: Representación de un plano paralelo al vertical de proyección.

Fig. 118. — Sistema diédrico: Plano paralelo al horizontal de proyección.

proyección H carecerá de traza sobre él, y, por tanto, solamente tendrá traza vertical P' , paralela a la línea de tierra, que será vista si el plano horizontal tiene cota positiva, es decir, si atraviesa los cuadrantes I y II, y será oculta cuando, por ser su cota negativa, atraviere los cuadrantes III y IV.

Plano de canto. (Figuras 120 y 121.)

Este plano es perpendicular al plano vertical y recibe también el nombre de

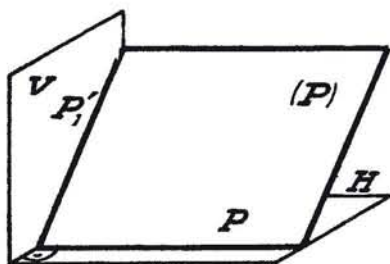


Fig. 120. — Sistema diédrico: Plano de canto o proyectante vertical.

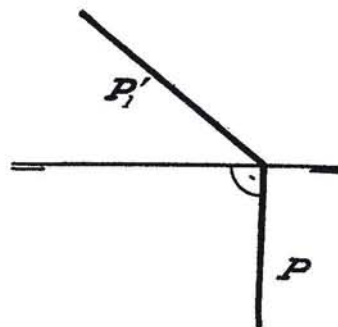


Fig. 121. — Sistema diédrico: Representación de un plano de canto o proyectante vertical.

plano proyectante, por seguir la dirección proyectante vertical.

Tiene la particularidad de que su traza horizontal ha de ser perpendicular a la línea de tierra, como se indica en la figura 121.

Este plano, por ser proyectante, tiene una característica que utilizaremos con frecuencia, y es la de que *cualquier elemento contenido en él se proyecta verticalmente sobre su traza vertical P'_1* .

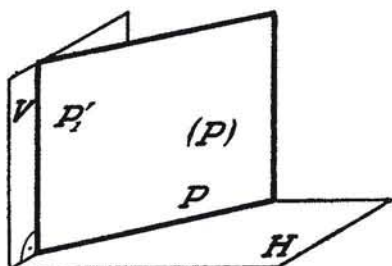


Fig. 122. — Sistema diédrico: Plano perpendicular al horizontal o proyectante horizontal.

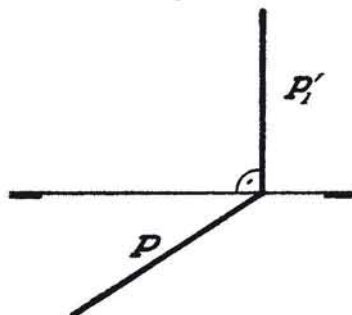


Fig. 123. — Sistema diédrico: Representación de un plano perpendicular al horizontal o proyectante horizontal.

Plano perpendicular al plano horizontal. (Figs. 122 y 123.)

Por razones análogas a las expuestas en relación con la figura anterior, este plano está caracterizado porque su traza vertical P'_1 es perpendicular a la línea de tierra, siendo cualquiera su traza horizontal. También tiene análoga propiedad que el plano de canto, de que todo lo que contiene es proyectado horizontalmente, según su traza horizontal P .

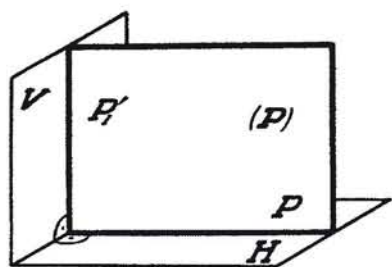


Fig. 124. — Sistema diédrico: Plano de perfil.

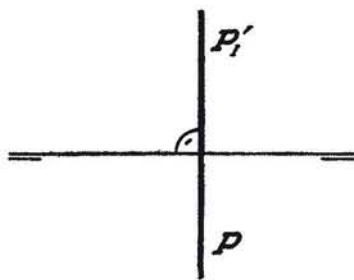


Fig. 125. — Sistema diédrico: Representación de un plano de perfil.

Plano de perfil. (Figs. 124 y 125.)

Este plano es perpendicular a la vez a los dos planos de proyección; es decir, que tiene la particularidad de que sus dos trazas vienen con-

fundidas y perpendiculares a la línea de tierra. Goza de las mismas ventajas que los planos correspondientes a las figuras anteriores 120 y 122, proyectándose todo su contenido sobre sus trazas.

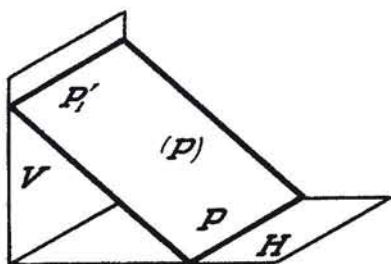


Fig. 126. — Sistema diédrico: Plano paralelo a la línea de tierra.

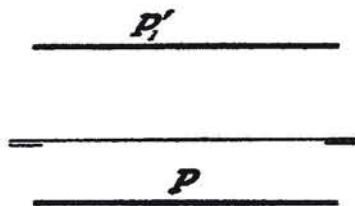


Fig. 127. — Sistema diédrico: Representación de un plano paralelo a la línea de tierra.

Plano paralelo a la línea de tierra. (Figs. 126 y 127.) Sabiendo que todo plano está representado por sus trazas y éstas tienen común el punto de la línea de tierra, al ser este plano paralelo a ella, dicho punto será impropio y, por tanto, sus trazas $P-P'$, resultarán paralelas a dicha línea de tierra.

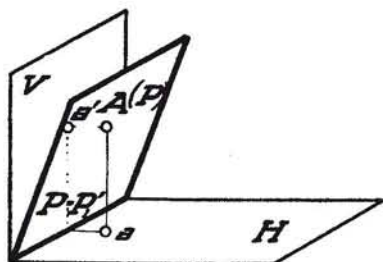


Fig. 128. — Sistema diédrico: Plano que pasa por la línea de tierra.

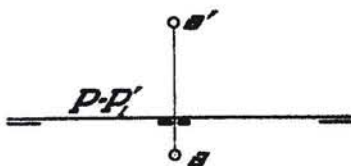


Fig. 129. — Sistema diédrico: Representación de un plano que pasa por la línea de tierra.

Plano que pasa por la línea de tierra. (Figs. 128 y 129.) Al estar confundidas las trazas $P-P'$, en la línea de tierra, queda indeterminada la posición del plano, si solamente representamos en el del dibujo las dos trazas $P-P'$, en la línea de tierra, y será preciso recurrir a individualizar su posición mediante un punto contenido en él, como, por ejemplo, el $a-a'$. De esta forma el plano está determinado y se representa con dos trazos, uno a cada lado de la proyectante correspondiente al punto a en cuestión.

Planos perpendiculares a los bisectores. (Figs. 130 y 131.) Supongamos representado en el sistema por B_1 el plano bisector 1.º, así como un plano (P) perpendicular a él.

Siendo I la intersección de estos dos planos, cualquier recta que

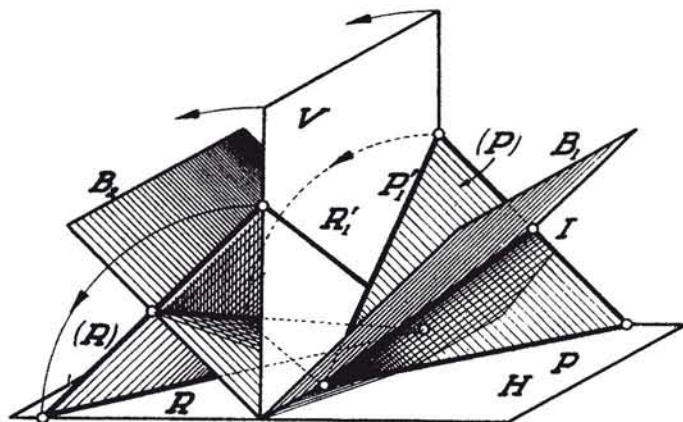


Fig. 130. — Sistema diédrico: Planos perpendiculares a los bisectores.

pase por ésta podrá ser eje de simetría de las dos regiones del plano P separadas por el bisector B_1 y comprendidas entre los de proyección.

Por tanto, la línea de tierra cumple con esta condición, y las trazas $P-P'_1$ formarán en el espacio el mismo ángulo con la línea de tierra. Esta propiedad se sigue manteniendo cuando el plano vertical V ha coincidido con el plano horizontal H , motivo por el cual vendrá representado el plano perpendicular al primer plano bisector B_1 y como aparece en la fig. 131, formando sus trazas P y P'_1 el mismo ángulo α con la línea de tierra, es decir, siendo simétricas con respecto a ella.

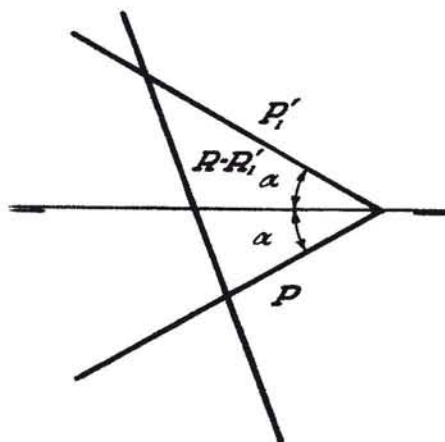


Fig. 131. — Sistema diédrico: Representación de un plano perpendicular al primer bisector: $P-P'_1$, y de un plano perpendicular al segundo bisector: $R-R'_1$.

De la misma manera, y considerando el plano (R) perpendicular al plano bisector 2.º B_2 , sus trazas R y R'_1 son simétricas con respecto de la línea de tierra en el espacio, y vemos que por el sentido del giro efectuado dichas trazas se confundirán en el plano de representación, tal como aparece en la figura 131.

Problema I (Fig. 132.) *Situar una recta cualquiera en un plano dado $P-P'$.*

Para ello, bastará elegir dos puntos del plano y unirlos convenientemente. Los puntos que se obtienen con mayor facilidad son: uno de la traza vertical $v-v'$ y otro de la traza horizontal $h-h'$, con lo cual obtenemos las proyecciones de la recta deseada: $r-r'$.

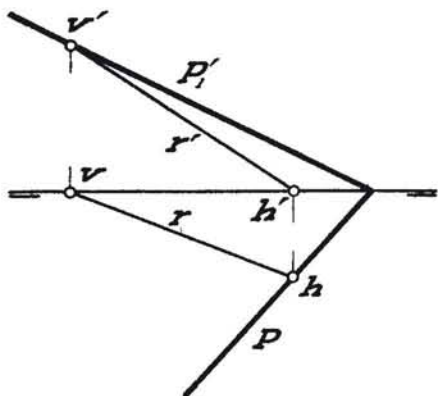


Fig. 132. — Sistema diédrico: Recta situada en un plano.

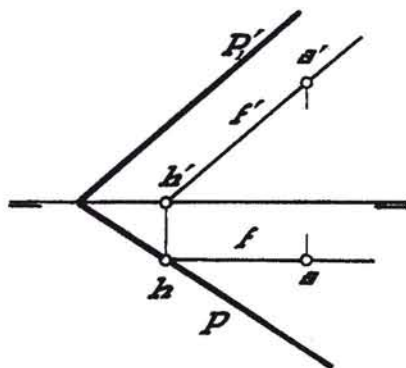


Fig. 133. — Sistema diédrico: Punto situado sobre un plano.

Problema II (Fig. 133.) *Situar un punto en un plano dado $P-P'$.*

El mecanismo consistirá en situar previamente una recta en el plano, para luego colocar el punto sobre la recta.

Para ello, en vez de elegir dos puntos como hemos hecho en la figura anterior, elegiremos solamente uno: $h-h'$, que nos bastará para situar un frontal del plano en cuestión: $f-f'$. (Véase la fig. 115.)

Bastará tomar una cualquiera de las proyecciones del punto: a , por ejemplo, para referirla en a' sobre f' .

Problema III (Fig. 134.) *Colocar una horizontal o una frontal en un plano dado por dos rectas.*

Sean $r-r'$ y $s-s'$ las dos rectas dadas, que se cortan en el punto $a-a'$.

Se empieza por elegir la posición f del frontal, que será paralela a la línea de tierra, la cual no podrá tener más puntos comunes con las rectas dadas que los que se proyecten en b y c , que referiremos a sus proyecciones: b' sobre r' y c' sobre s' .

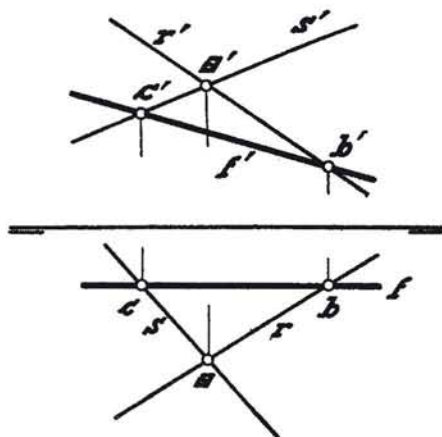


Fig. 134. — Sistema diédrico: Frontal de un plano dado por dos rectas convergentes.

La unión de c' y b' nos da la proyección vertical f' de la frontal pedida, que recordaremos es paralela a la traza vertical P' , del plano.

Proyecciones de una forma plana. (Fig. 135.) Supongamos una figura plana cualquiera dada por su proyección horizontal: $a-b-c-d$, situada sobre un plano también dado $P-P'$, lo cual es siempre posible.

La proyección vertical de esta figura: $a'-b'-c'-d'$ no podrá ser cualquiera; es decir, generalmente no coincidirá con un punto del plano, el que se tomara uno cualquiera de la línea de referencia que parta de

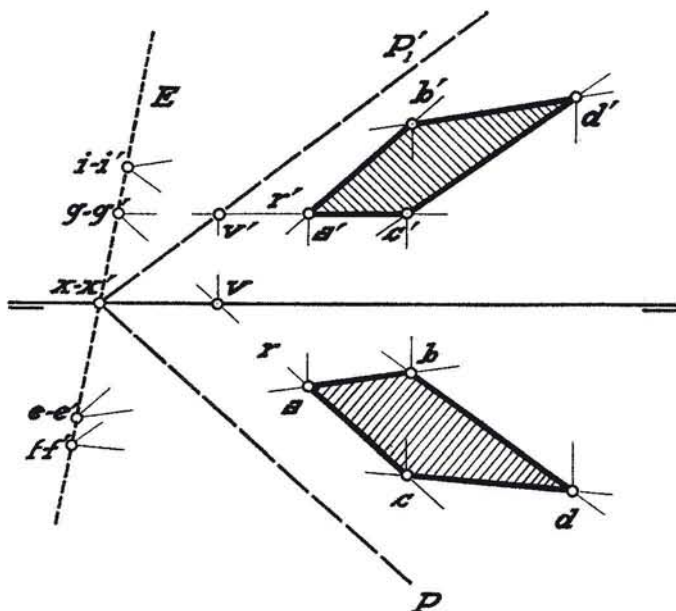


Fig. 135. — Sistema diédrico: Las proyecciones de una forma plana son afines.

su proyección horizontal; entonces tendremos que saber situar un punto sobre el plano, cuando se conoce o se fija una de sus proyecciones, problema resuelto en relación con la figura 133.

Para ello, elegido un punto proyección horizontal a , trazaremos por él la horizontal r , cuya proyección vertical es r' , partiendo del conocimiento de su traza vertical $v-v'$; seguidamente referiremos a en a' sobre r' , y esta misma operación se podrá repetir para todos los puntos que nos interesen.

Sin embargo, existe una afinidad que nos permite relacionar las dos proyecciones de una forma plana, siendo la dirección de afinidad la perpendicular a la línea de tierra, y teniendo por eje de afinidad la intersección E del plano dado con el segundo plano bisector.

La demostración es evidente: Si consideramos todas las rectas del plano, sus respectivas proyecciones se irán cortando según una serie de puntos de proyecciones confundidas.

Ahora bien: estos puntos (véanse las figuras 86 y 87, puntos D y K) son del segundo plano bisector y pertenecen, por tanto, a los dos planos en cuestión: al dado P y al bisector $2.^\circ B_2$, lo que equivale a decir que se hallan todos situados sobre su recta común: la intersección.

Como consecuencia:

1.º Las proyecciones horizontales de todas las rectas de un plano y sus correspondientes proyecciones verticales se cortan en puntos de una recta fija: intersección del plano que las contiene con el bisector $2.^\circ$ o eje de afinidad E .

2.º La dirección de afinidad es siempre perpendicular a la línea de tierra, por ser la de referencia de las proyecciones de los puntos.

Aunque de momento no sabemos hallar intersecciones de planos, el eje E se obtiene directamente dada su característica especial: por el punto $x-x'$ común a las trazas $P-P'_1$, y por otro cualquiera $f-f'$, por ejemplo, intersección de las proyecciones de una recta arbitrariamente elegida en el plano: $\overline{c-d} - \overline{c'-d'}$.

Observamos que la recta $\overline{a-b}$ y su afín $\overline{a'-b'}$ se cortan en el punto doble $e-e'$; las $\overline{a-c}$ y $\overline{a'-c'}$, en el $g-g'$; las $\overline{b-d}$ y $\overline{b'-d'}$, en $i-i'$, etc.

Demostrada la propiedad anterior, se podrá dibujar unas de las proyecciones de una figura plana en función de la otra, cuando conozcamos el plano que la contiene, aplicando la sencilla relación de afinidad existente entre ambas, quedando definido el sistema mediante su eje E , y un par de puntos afines, proyecciones de un punto cualquiera del plano en cuestión.

CAPITULO V

SISTEMA AXONOMÉTRICO ISOMÉTRICO

Representación y alfabeto del punto, de la recta y del plano.

Ya hemos visto en la fig. 44 cómo se representa el punto en este sistema.

Vamos ahora a detallar las distintas posiciones que puede ocupar con respecto a las tres caras del triedro trirectángulo que constituye el sistema.

Alfabeto del punto. Ante todo recordaremos que las tres caras del triedro a que nos referimos en este sistema, dividen el espacio en ocho cuadrantes. Especificamos a continuación las 27 distintas posiciones que ocupa el punto según se halle situado, como lo detallan las figuras siguientes:

Figura 136. Para mayor claridad, observaremos que las caras del triedro trirectángulo $X-O-Z$ e $Y-O-Z$, que dividen el espacio en cuatro cuadrantes, al ser cortadas por la tercera cara $X-O-Y$, determinarán sobre ella

cuatro regiones: $X-O-Y$, $X-O-Y'$, $Y'-O-X'$ y $X'-O-Y$. Muchas veces, aunque impropriamente, se llamará *plano horizontal* a la cara $X-O-Y$ y *proyección horizontal* a lo que sobre ella se proyecte. También se denomina *proyecciones verticales o laterales* a las obtenidas sobre las caras $X-O-Z$ y $Z-O-Y$. Esto generaliza los conceptos al comparar este sistema de representación con los demás.

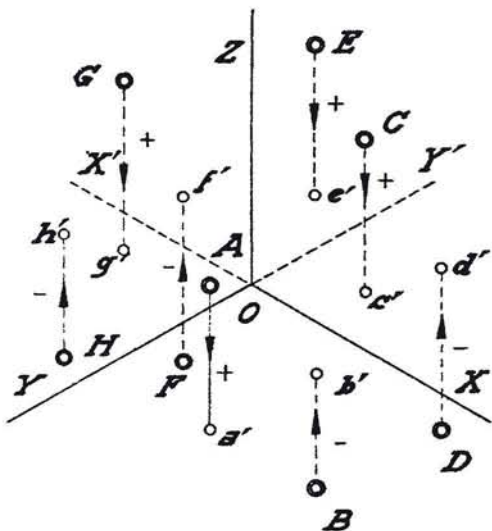


Fig. 136. — Sistema axonométrico: Representación de las distintas posiciones del punto en relación con los ocho cuadrantes del sistema.

Las partes de espacio situadas por encima del plano $\overline{X-O-Y}$ se considerarán de *cotas* o *alturas* positivas, y las partes inferiores a él, de *cotas* o *alturas* negativas.

De esta forma, el punto $A-a'$ estará situado con su cota positiva en el primer cuadrante $\overline{X-O-Y}$, y se *representará visto* por considerarse así todos los puntos del espacio pertenecientes a esta región, donde se supone situado el observador. El punto $B-b'$ tiene su cota negativa al hallarse por debajo del plano $\overline{X-O-Y}$; se *representará oculto*.

Ocupan una posición relativa idéntica al A , los puntos $C-E-G$

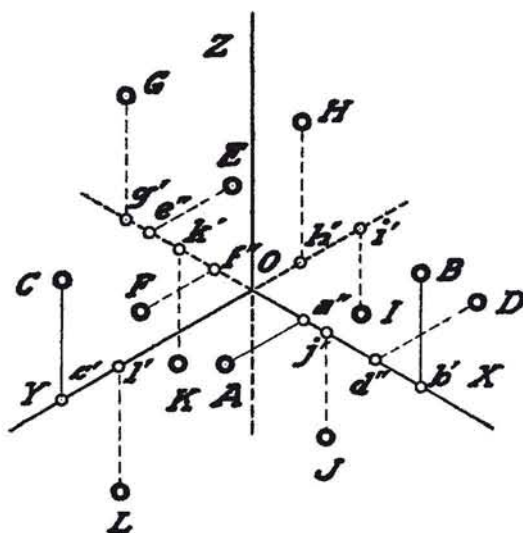


Fig. 137. — Sistema axonométrico: Representación de las posiciones del punto situado en las caras del triedro.

en los demás cuadrantes, y en su parte superior o positiva. Análogamente al B están situados los $D-F-H$ de cotas negativas, siendo, por tanto, *ochos* las posiciones que ocupa un punto cualquiera en cada uno de los *ochos cuadrantes* a que nos referimos.

Figura 137. En esta figura aparecen las distintas posiciones del punto situado sobre las caras del triedro trirectángulo, de las que $A-a'$, $B-b'$, $C-c'$ son únicamente *vistas* por estar situadas en la región del triedro trirectángulo visto, siendo ocultas todas las demás posiciones: $D-d'$, $E-e'$, $F-f'$, $G-g'$, $H-h'$, $I-i'$, $J-j'$, $K-k'$, $L-l'$.

Estas posiciones son cuatro por cada cara del triedro; es decir, en total, 12 posiciones.

Figura 138. En esta figura aparecen las posiciones de los puntos situados *sobre los ejes*, que en total serán seis, de los cuales los puntos $A-B-C$ serán vistos, y las $D-E-F$ ocultos, correspondiendo la posición O al origen, o sea al punto situado sobre los tres ejes, que tiene todas sus proyecciones confundidas: $O-o'-o''-o'''$.

Resumen	{	8 posiciones en los cuadrantes;
		12 — sobre las caras;
		7 — sobre los ejes.
Total.	27	

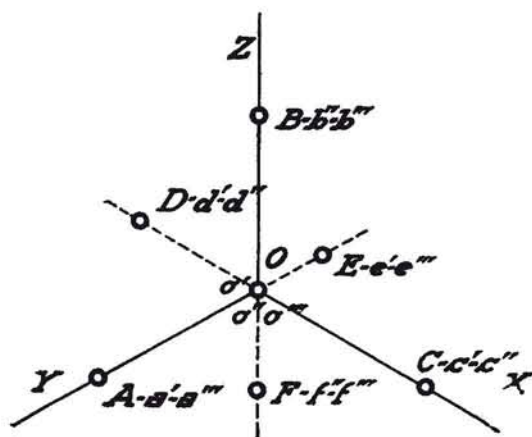


Fig. 138.—Sistema axonométrico: Representación de las distintas posiciones del punto situado sobre las aristas del triedro.

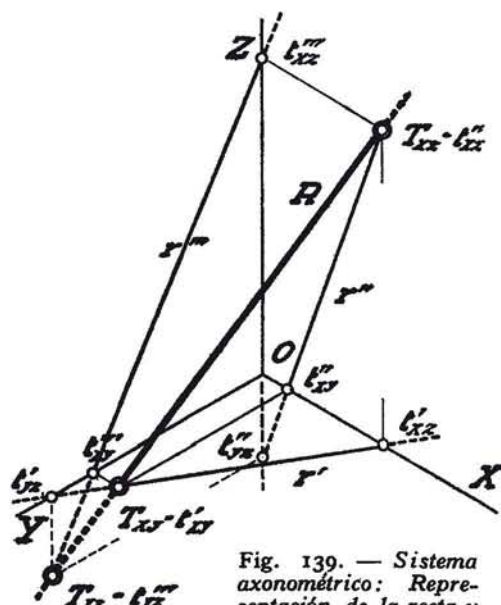


Fig. 139.—Sistema axonométrico: Representación de la recta y sus trazas con las caras del triedro.

Representación de la recta. (Figura 139.) La recta tendrá por proyecciones las respectivas intersecciones de sus planos proyectantes: con el plano de proyección π : R (proyección directa), y con las caras del triedro las $r'-r''-r'''$. Téngase presente la figura 44.

Son puntos notables de la representación de esta recta los situados sobre las caras del triedro: las trazas T_{xx} , T_{xy} y T_{yz} . Estos puntos, por estar situados sobre las caras ya citadas, se proyectarán sobre los ejes como se puede apreciar, por ejemplo, con T_{xx} , que se confunde con t''_{xx} , hallándose situadas sus otras proyecciones t'_{xx} sobre el eje $O-X$ y t'''_{xx} sobre el eje $O-Z$, sucediendo lo propio con las otras trazas.

Dadas las características de estas trazas tenemos indicado el camino par conseguir las.

En la figura representada se aprecian las posiciones de los planos proyectantes formados por $R-r'$, paralelo al eje $O-Z$; $R-r''$, paralelo al eje $O-Y$, y finalmente, el determinado por $R-r'''$, paralelo al eje $O-X$.

Alfabeto de la recta. Recta paralela a una cara del triedro (Fig. 140.)

La recta R que se representa es paralela a la cara $\overline{X-O-Y}$, lo cual quiere decir que su traza T_{xy} es impropia, por lo que su proyección r' habrá de ser paralela a la proyección directa R , resultando ser sus otras dos proyecciones r'' y r''' , respectivamente, paralelas a los ejes $\overline{O-X}$ y $\overline{O-Y}$. También se podrá llamar a esta recta: *horizontal*.

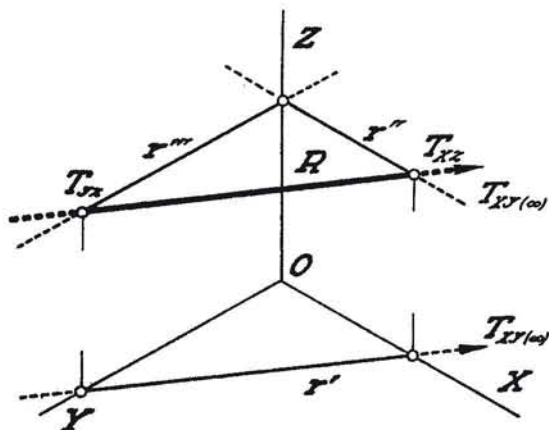


Fig. 140.—Sistema axonométrico. Representación de una recta paralela a una cara del triedro u horizontal.

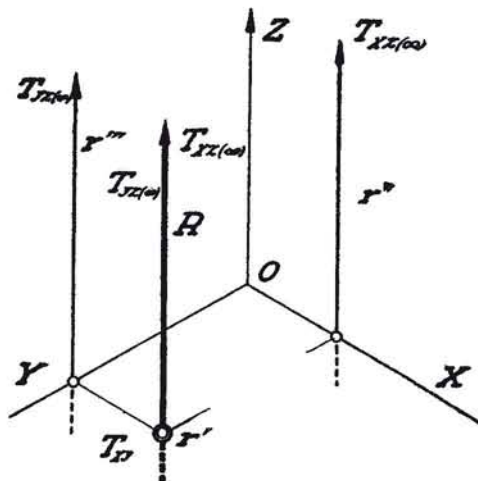


Fig. 141.—Sistema axonométrico: Representación de una recta paralela a una arista del triedro.

Recta paralela a un eje. (Fig. 141.) La recta R siendo paralela al eje $\overline{O-Z}$ se proyecta sobre el plano $\overline{X-O-Y}$, según un punto r' , y sobre las otras dos caras del triedro, según las rectas r'' , r''' , paralelas al eje $\overline{O-Z}$. Las trazas sobre estas caras T_{yz} y T_{xz} son impropias, por resultar ser esta recta paralela a la arista de las dos caras en cuestión.

Esta recta se podrá considerar como de punta con respecto de la cara $\overline{X-O-Y}$.

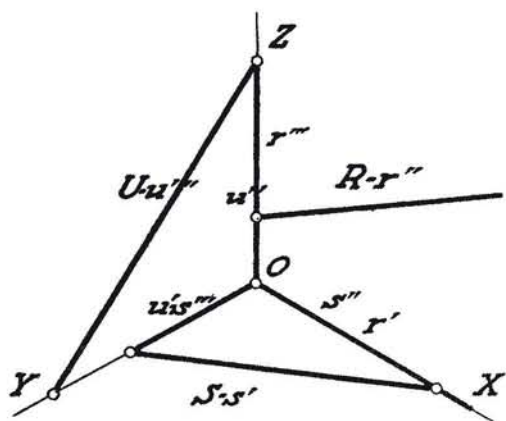


Fig. 142.—Sistema axonométrico: Representación de la recta situada sobre una cara del triedro.

Recta situada sobre una cara del triedro. (Fig. 142.) Las rectas $R-r''$, $S-s'$ y $U-u'''$, por estar situadas en las caras del triedro, se proyectan sobre los ejes, según se aprecia, como consecuencia de que *todos sus puntos* se hallan en las caras del triedro y tener las mismas posiciones relativas que aparecen en la figura 137.

Recta que pasa por un eje. (Fig. 143.) La recta R corta al eje $O-Z$ en un punto que será su doble traza sobre las dos caras, cuya arista es dicho eje $O-Z$; es decir, se confundirán T_{yz} y T_{zx} motivo por el cual r' pasa por el origen O , y r'' y r''' pasan por la doble traza ya citada.

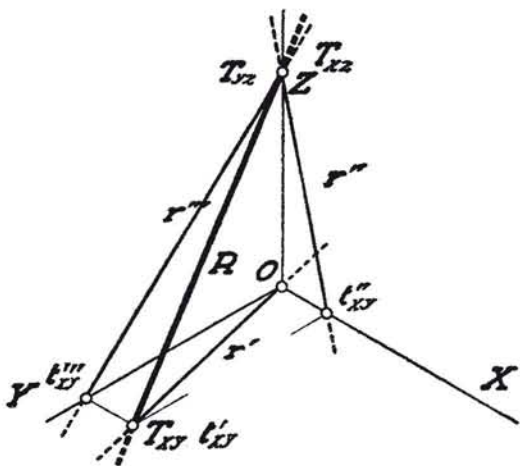


Fig. 143.—Sistema axonométrico. Representación de una recta que corta a una arista del triedro.

Recta que pasa por el origen. (Fig. 144.) La recta R , por consideraciones análogas a las anteriormente hechas, tendrá todas sus trazas coincidentes con el origen, motivo por el cual sus respectivas proyecciones r' , r'' y r''' pasan por O .

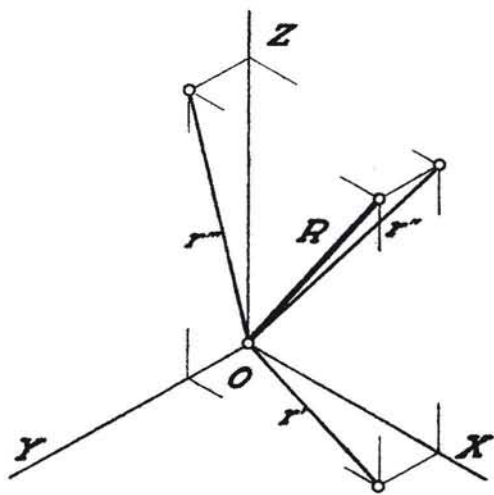


Fig. 144. — Sistema axonométrico: Representación de una recta que pasa por el vértice del triedro.

Representación del plano. (Figura 145.) Sabemos que el plano queda determinado por tres de sus puntos, y siendo éstos los $A-a'$, $B-b'$, $C-c'$, podremos operar con este plano así definido; pero atendiendo a la necesidad de tenerlo que manejar ulteriormente, y recordando lo que, a propósito de

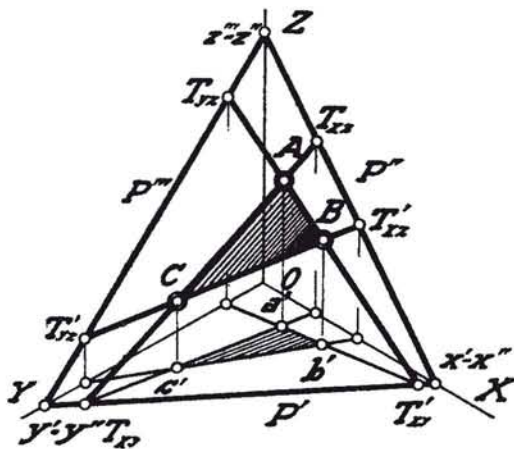


Fig. 145.—Sistema axonométrico: Representación del plano dado por tres puntos.

ello, dijimos con motivo de su representación en los otros sistemas, simplificaremos su representación utilizando sus trazas con las caras del triedro trirectángulo.

Por ello, y considerando que la traza de un plano es el lugar geométrico de todas las de sus rectas, bastará que hallemos, por ejemplo, las T_{xz} de la recta $A-C$ y la T'_{xz} de la recta $B-C$ para, así, conocer la traza P'' del plano en cuestión sobre la cara $X-O-Z$, la cual nos proporcionará los puntos x'' y z'' de intersección con los ejes $O-X$, $O-Z$, respectivamente. Por el punto z'' pasará la traza P''' y también por la traza T_{yz} de la recta $A-B$. Determinado el punto $y'-y''$, común al eje $O-Y$ y a P''' , quedará también definida la traza P' al unir y' con x' .

Como comprobación, se hallarán situados: T_{yz}' de la recta $B-C$, sobre la traza P''' del plano, T_{xy} de la recta $A-C$, y T'_{xy} de la $A-B$, sobre P' .

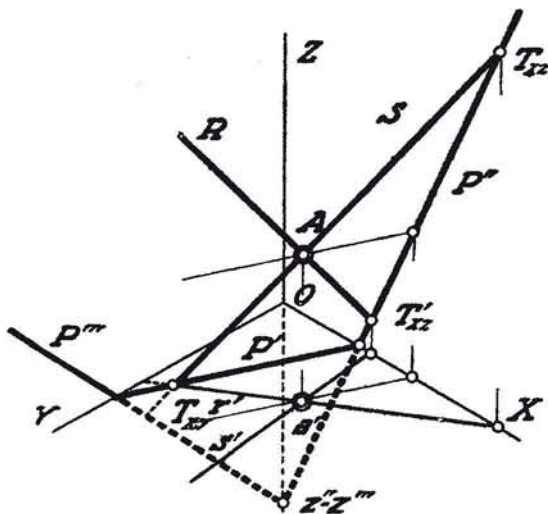


Fig. 146. — Sistema axonométrico. : Representación de un plano dado por dos rectas que se cortan.

Como resumen, un plano quedará representado por sus trazas, debiendo cumplir éstas la única condición de que se corten dos a dos sobre el mismo punto de los ejes coordenados que les corresponda.

Fig. 146. Si el plano viniera determinado por dos rectas que se cortan, tales como $R-r'$ y $S-s'$ que tienen común el punto $A-a'$, las trazas $P'-P''-P'''$ se hallarán de la misma forma que en la figura anterior, apreciándose el que, efectivamente, tienen, dos a dos, común el mismo punto del eje coordenado: Con T_{xz} y

T'_{xz} se dibuja P'' ; mediante la determinación de otra traza más, por ejemplo, la T_{xy} , se terminará la representación del plano.

El punto $z''-z'''$ en que cortan las trazas P'' y P''' al eje $O-Z$, es punto de cota negativa, motivo por el cual las porciones de trazas que por él pasan son ocultas y se representan de trazo discontinuo.

Alfabeto del plano.

Plano paralelo a un eje. (Fig. 147) El plano representado P' , P'' y P''' , al ser paralelo al eje $O-Z$, tendrá impropio su punto común con el mismo: el punto doble z''_{∞} y z'''_{∞} , lo cual motiva el que las trazas P'' y P''' se representen paralelas al eje $O-Z$.

Este plano es, asimismo, un plano proyectante, que se podrá llamar *proyectante horizontal*, y todo lo que él contenga se proyectará sobre la cara $X-O-Y$ según su traza P' .

Plano paralelo a una cara del triedro. (Fig. 148.) En este caso, el plano tiene dos puntos impropios correspondientes a los

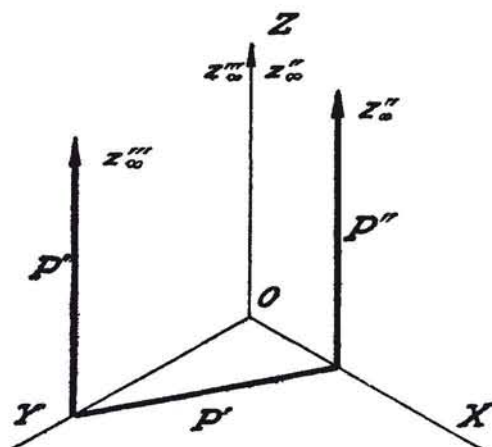


Fig. 147. — Sistema axonométrico: Representación de un plano paralelo a una arista del triedro.

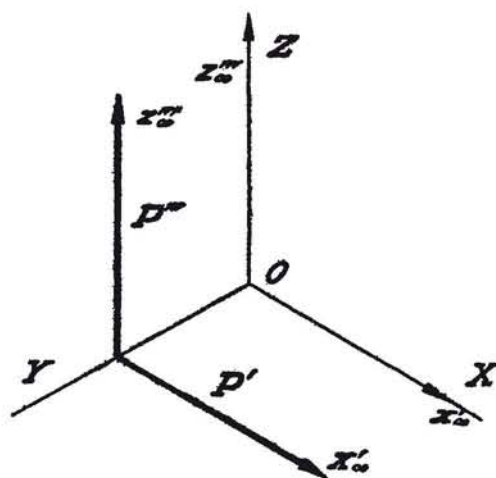


Fig. 148. — Sistema axonométrico: Representación de un plano paralelo a una cara del triedro.

ejes que constituyen la cara a que es paralelo, es decir, x'_{∞} y z'''_{∞} .

Este plano carece, por tanto, de traza P'' con la cara $\overline{X-O-Z}$ a la que es paralelo.

Este plano es, a la vez, proyectante sobre la cara $\overline{X-O-Y}$ y sobre la $\overline{Z-O-Y}$, por lo cual todo lo que contenga se proyectará sobre estas dos caras, según sus trazas P' y P''' , respectivamente.

Plano que pasa por un eje. (Fig. 149.) El plano representado en la figura de referencia, al pasar por el eje $\overline{O-X}$ tiene sus trazas P' y P''

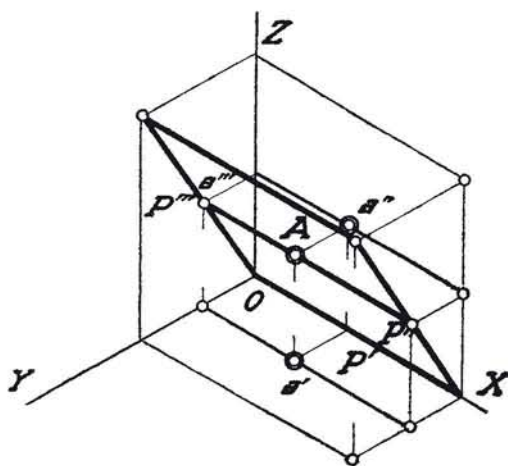


Fig. 149. — Sistema axonométrico: Representación de un plano que pasa por una arista del triedro.

confundidas con dicho eje, siendo su traza P''' una recta que pasa por el origen. Este plano podrá estar definido por el eje $\overline{O-X}$ y un punto cualquiera $A-a'$, o bien por el mismo eje $\overline{O-X}$ y P''' .

Obsérvese que la situación de este plano es un caso particular del representado en la figura 147, pues resulta ser un plano proyectante sobre la cara $\overline{Z-O-Y}$, comprobándose que la proyección de uno cualquiera de sus puntos A coincide en a''' de la traza P''' .

Plano que pasa por el origen O.

(Fig. 150) En este caso viene definido por dos cualesquiera de sus

trazas P'' y P''' , que pasen por el origen, las cuales serán suficientes para que se halle determinado, puesto que en realidad tenemos un par de rectas del plano en cuestión.

Al parecer, resulta indeterminada la traza P' de este plano sobre la cara $\overline{X-O-Y}$; pero esta indeterminación desaparece, pues al trasladar dicha cara $\overline{X-O-Y}$ en $(\overline{X})-(\overline{O})-(\overline{Y})$, conseguimos una traza (P') que necesariamente habrá de ser paralela a la que buscamos P' , que, además, pasará por el origen O .

Si colocamos una recta $R-r'$ sobre dicho plano, su traza t_{xy} (punto de altura cero) será suficiente para que quede también definida la traza P' al unir dicha traza t_{xy} con el origen O .

Nota: A continuación vemos cómo se coloca una recta en un plano.

Problema I. (Fig. 151.) *Situar una recta sobre un plano.*

El plano dado es $P'-P''-P'''$.

Para situar una recta $R-r'$ sobre este plano bastará elegir dos puntos del mismo y unirlos ordenadamente.

Los puntos que generalmente se eligen, si es que no se estipula otra

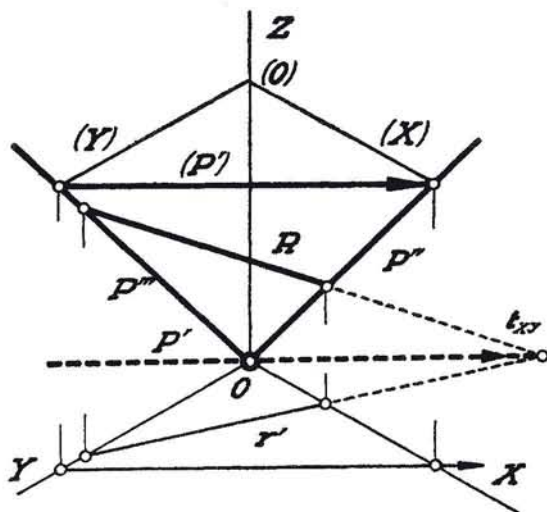


Fig. 150. — Sistema axonómico: Representación de un plano que pasa por el vértice del triedro.

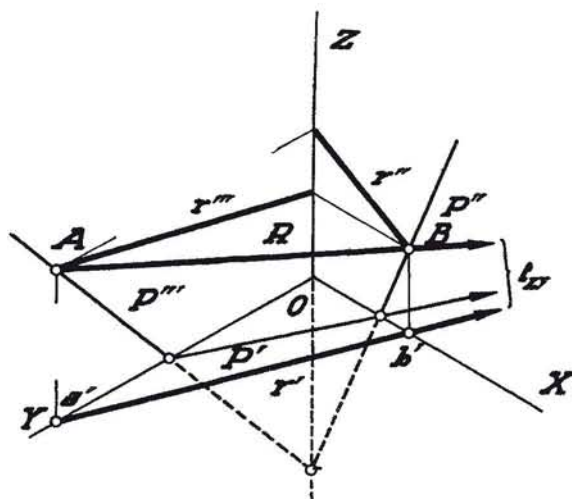


Fig. 151. — Sistema axonómico.— Recta situada en un plano cualquiera.

condición, son, uno de cada traza, tales como el $A—a'$ y el $B—b'$, por ser más sencilla su determinación, bastando luego unir sus proyecciones homónimas para tener las proyecciones $R—r'—r''—r'''$ de la recta en cuestión.

Como comprobación, el punto de encuentro de R con r' , es decir, su traza t_{xy} , o punto de altura cero, habrá de pertenecer a la traza P' del plano sobre la cara $\overline{X—O—Y}$.

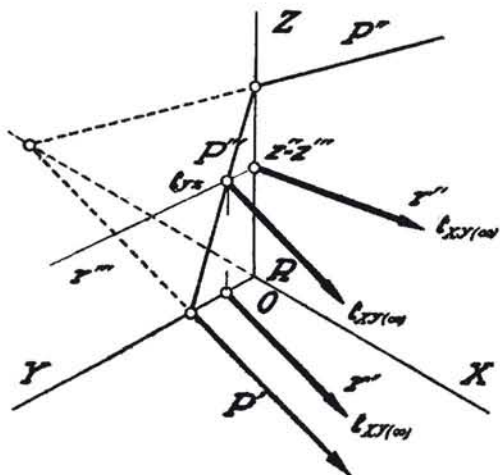


Fig. 152.—Sistema axonométrico: Colocación de una recta sobre un plano, que sea paralela a una cara del triedro (horizontal).

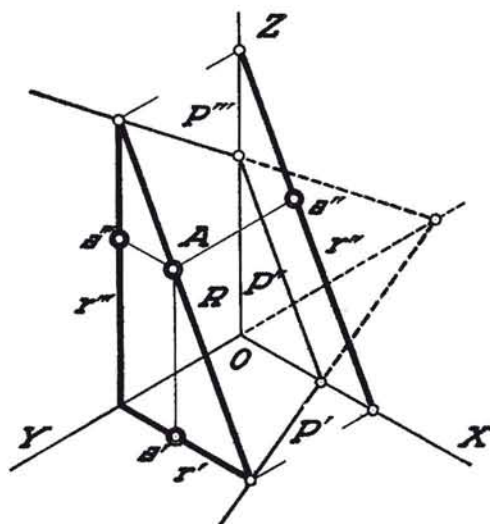


Fig. 153.—Sistema axonométrico: Situación de una recta sobre un plano, paralela a una cara del triedro (frontal).

Problema II. (Fig. 152.) *Situar sobre un plano dado P una recta paralela a una cara de triedro.*

Si suponemos que la cara elegida es la $\overline{X—O—Y}$, bastará elegir un punto tal que el t_{xy} de la traza P''' , y trazar por él la paralela r''' al eje $\overline{O—Y}$, pues sabemos, según la figura 140, que ésta ha de ser la proyección de la recta deseada sobre esta cara $\overline{Z—O—Y}$; desde el punto z'' y z''' del eje $\overline{O—Z}$, trazando r'' paralela al eje $\overline{O—X}$, tendremos definida la recta R , cuya proyección horizontal r' ha de ser paralela a P' , puesto que su traza sobre la cara $\overline{X—O—Y}$ ha de ser su punto impropio y debe estar situado sobre P' . R y r' también han de ser paralelas.

Problema III. (Fig. 153.) *Situar un punto en un plano dado.*

Sea este plano $P'—P''—P'''$. Empezaremos por colocar en él una recta cualquiera $R—r'—r''—r'''$, que para más comodidad hemos elegido paralela a la cara $\overline{X—O—Z}$; es decir, una frontal del plano con respecto a esa cara, repitiendo la construcción correspondiente a la figura 152.

Bastará elegir un punto A sobre R para que sobre las proyecciones homónimas de ésta vengan a situarse las proyecciones $a'—a''—a'''$ deseadas.

Problema IV. (Fig. 154.) *Dado un plano por dos rectas que se corten, trazar una recta contenida en él y que sea paralela a una cara del triedro.*

Sean las rectas $R-r'$ y $S-s'$ que se cortan en el punto $A-a'$.

Supongamos que la recta a determinar haya de ser paralela a la cara $\overline{X-O-Y}$.

Si esta recta no ha de estar sujeta a ninguna otra condición, por ejemplo, de distancia, empezaremos por trazar arbitrariamente una de sus proyecciones h''' paralela al eje $\overline{O-Y}$, la cual interceptará sobre

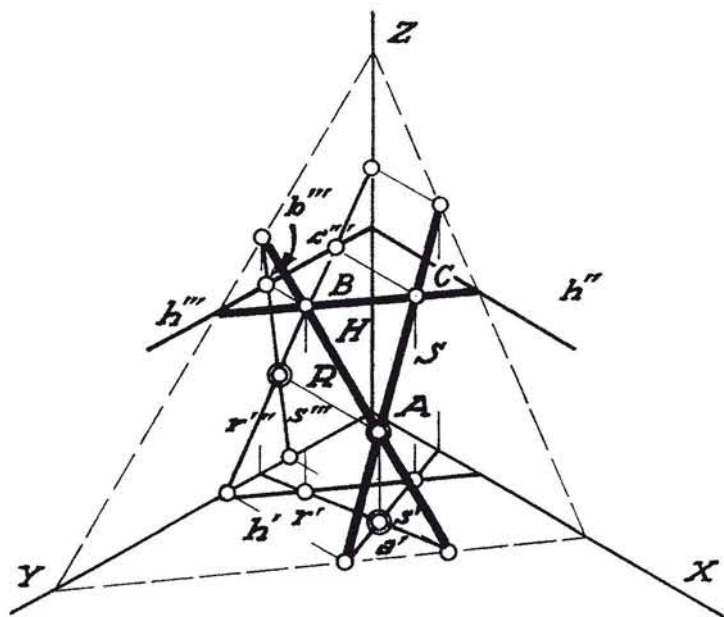


Fig. 154. — Sistema axonómico: Determinación y representación de una recta paralela a una cara del triedro sobre un plano dado por dos rectas que se cortan.

las proyecciones r''' y s''' los puntos b''' y c''' , que corresponderán a los del espacio B y C ; al unirlos, determinan la recta deseada $H-h'-h''$.

Se puede comprobar que las trazas de esta recta H se hallan sobre sus homónimas del plano determinado por las rectas dadas $R-S$.

Traza ordinaria de un plano. (Figura 155.) Existe una recta del plano representado en este sistema que

desempeña un papel trascendental en su manejo, que es su llamada *traza ordinaria* T_0 .

Esta traza es su recta común con el plano del dibujo.

Se aprecia en esta figura del espacio la posición relativa de la traza ordinaria T_0 y de las trazas $(P')-(P'')-(P''')$ del plano P con cada una de las tres caras del triedro: $\overline{O-X-Y-Z}$. En el capítulo próximo veremos la forma de determinar esta importante traza.

Proyecciones de una forma plana. (Fig 156.) Supongamos que en el plano representado por sus trazas $P'-P''-P'''$ existe una figura plana $A-B-C-D-E$.

Se trata de conseguir las proyecciones de dicha figura plana sobre las caras del triedro trirectángulo.

A tal fin, nos fijaremos en que existe una relación de afinidad entre la proyección directa y su proyección sobre la cara que se considera, en este caso la $X-O-Z$, siendo el eje de afinidad la recta común a los dos planos en cuestión; es decir, P'' , y la dirección de afinidad paralela al otro eje $O-Y$, motivo por el cual basta conocer un par de puntos

Fig. 155. — Sistema axonométrico: Taza ordinaria del plano.

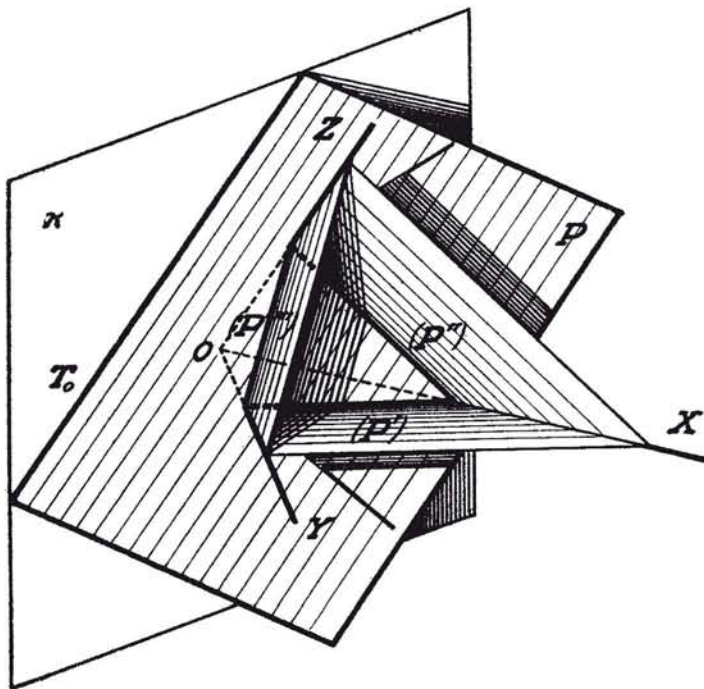
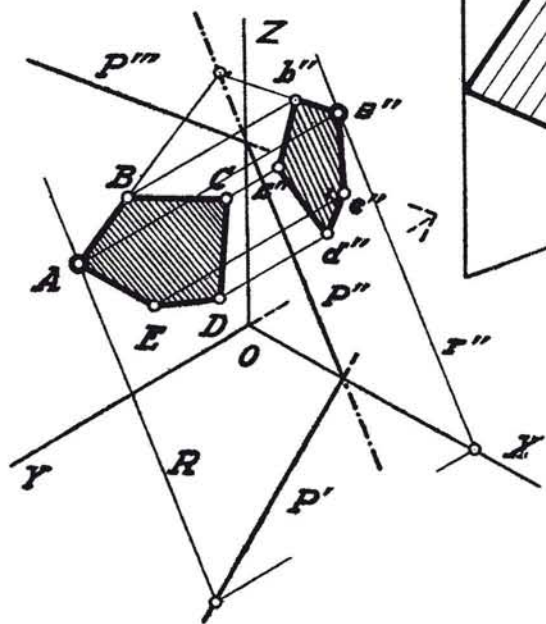


Fig. 156. — Sistema axonométrico: La proyección directa de una forma plana y cualquiera de sus proyecciones sobre las caras del triedro, son afines.

afines, por ejemplo $A-a''$, que se obtienen de una manera muy sencilla auxiliándonos de la recta $R-r''$ y repitiendo la construcción que aparece en la figura 153.

De la misma manera podemos conseguir las proyecciones de la figura plana representada sobre las caras $X-O-Y$ y $Z-O-Y$, utilizando como ejes de afinidad P' y P''' , y como direcciones de afinidad las $O-Z$ y $O-X$, respectivamente.

CAPITULO VI

SISTEMA CÓNICO

Representación y alfabeto del punto, de la recta y del plano.

Ya hemos visto en el capítulo II (Figs. 48 y 49.) cómo se representa un punto cualquiera en este sistema, integrado por el centro de proyección O , el plano π de proyección o del cuadro y el plano geométral G .

Alfabeto del punto. (Figura 157.) Los dos planos en cuestión π y G dividen al espacio en cuatro regiones; pero atendiendo a la importancia que en este sistema tiene la posición del centro proyector O , haremos intervenir además el espacio que queda limitado por el plano Δ paralelo al plano del cuadro que pasa por dicho punto O , que se llama *plano de desvanecimiento*.

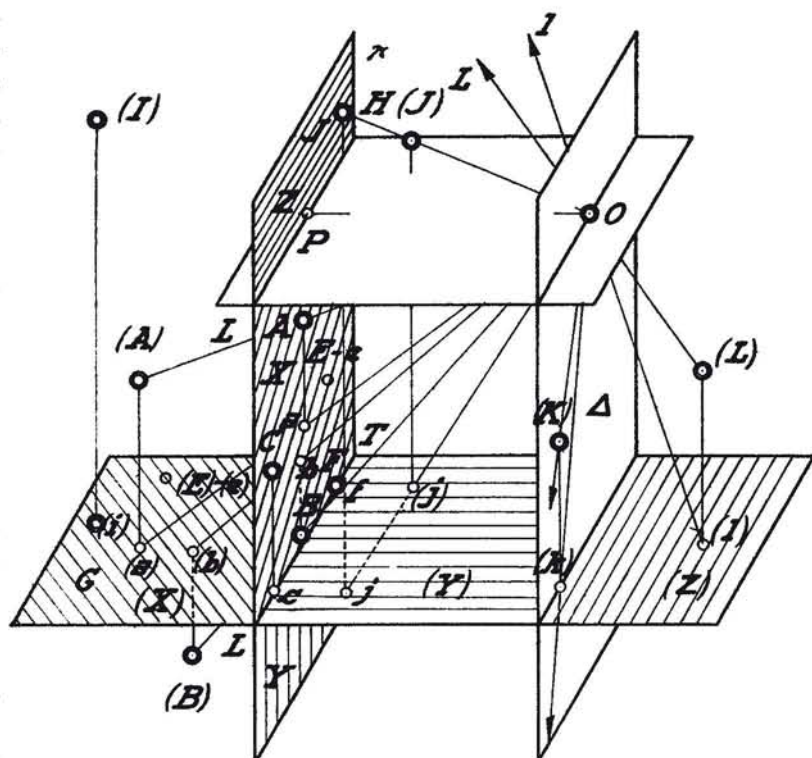


Fig. 157. — Sistema cónico: Posiciones del punto.

Un punto cualquiera puede ocupar diversas posiciones, tanto en los espacios así delimitados como sobre los tres planos fundamentales, y

por ello, teniendo en cuenta al mismo tiempo la figura 158, vemos que el punto (A)—(a) tiene como representación el A—a, que aparece en forma tal, que *a* se halla siempre por encima de la línea de tierra LT y por debajo de la proyección directa A del punto.

El punto (B)—(b) está representado también con su proyección horizontal *b* por encima de la línea de tierra LT y también por encima de la proyección directa B, por hallarse situado dicho punto por debajo del plano geometral G y detrás del plano de proyección π .

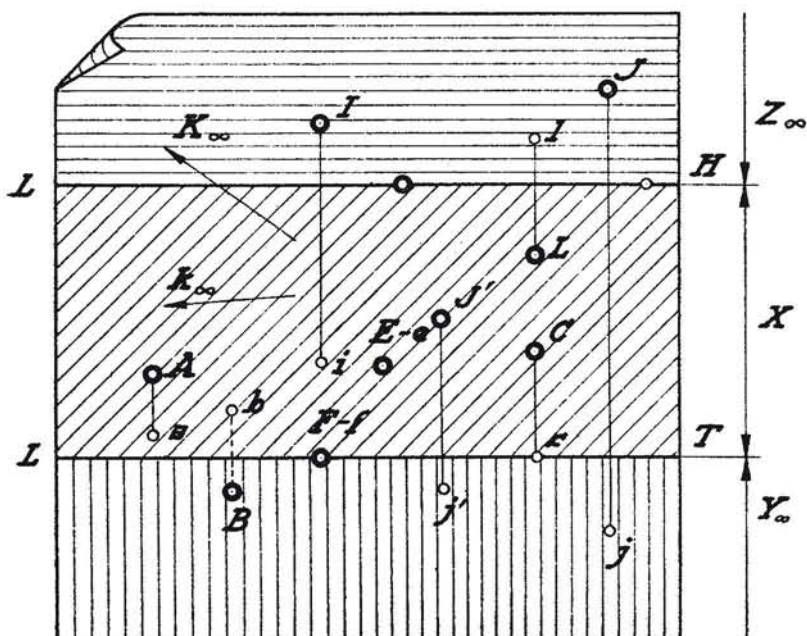


Fig. 158. — Sistema cónico: Alfabeto del punto.

Cuando el punto C—*c* esté situado sobre el plano del cuadro, su proyección horizontal *c* será un punto de la línea de tierra LT; y cuando dicho punto E—*e* sea del plano geometral G, sus proyecciones directa y horizontal se hallarán confundidas.

Si el punto estuviere en la línea de tierra LT, tal que F—*f*, gozará de las propiedades de los puntos situados en el geometral y en el de proyección; por consiguiente, sus proyecciones F—*f* estarán confundidas sobre la línea de tierra LT.

Si un punto tal que (I)—(*i*) se hallare situado por encima del plano de horizonte, pero detrás del plano del cuadro, su proyección horizontal *i* sería también un punto situado por encima de la línea de tierra, y su

proyección directa I se hallaría, como es lógico, por encima de la línea de horizonte LH .

Cuando el punto $(J) - (j)$ está situado entre el plano del cuadro π y el plano de desvanecimiento Δ , su proyección horizontal en el plano del dibujo j queda caracterizado por hallarse siempre por debajo de la línea de tierra LT , pudiendo estar su proyección directa J por encima de la horizontal j ; dicha proyección directa J podrá ser un punto situado por encima de la línea de horizonte, si es que en el espacio se hallara por encima del plano de horizonte, o J' si estuviere por debajo del mismo (j' siempre debajo de LT).

Cuando el punto $(K) - (k)$ estuviere situado en el plano de desvanecimiento Δ , su representación sobre el plano del cuadro vendría dada por una dirección $K_{\infty} - k_{\infty}$, y si el punto $(L) - (l)$ se hallara más allá del plano de desvanecimiento, su proyección estaría caracterizada en el plano del cuadro, porque la horizontal l se encontrará siempre por encima de la línea de horizonte LH , y la proyección directa L del punto, por debajo de su proyección horizontal l si el punto tiene cota positiva.

Si el punto estuviera situado sobre el plano de horizonte, su proyección directa sería necesariamente un punto de la línea de horizonte, pudiendo ser cualquiera su proyección horizontal.

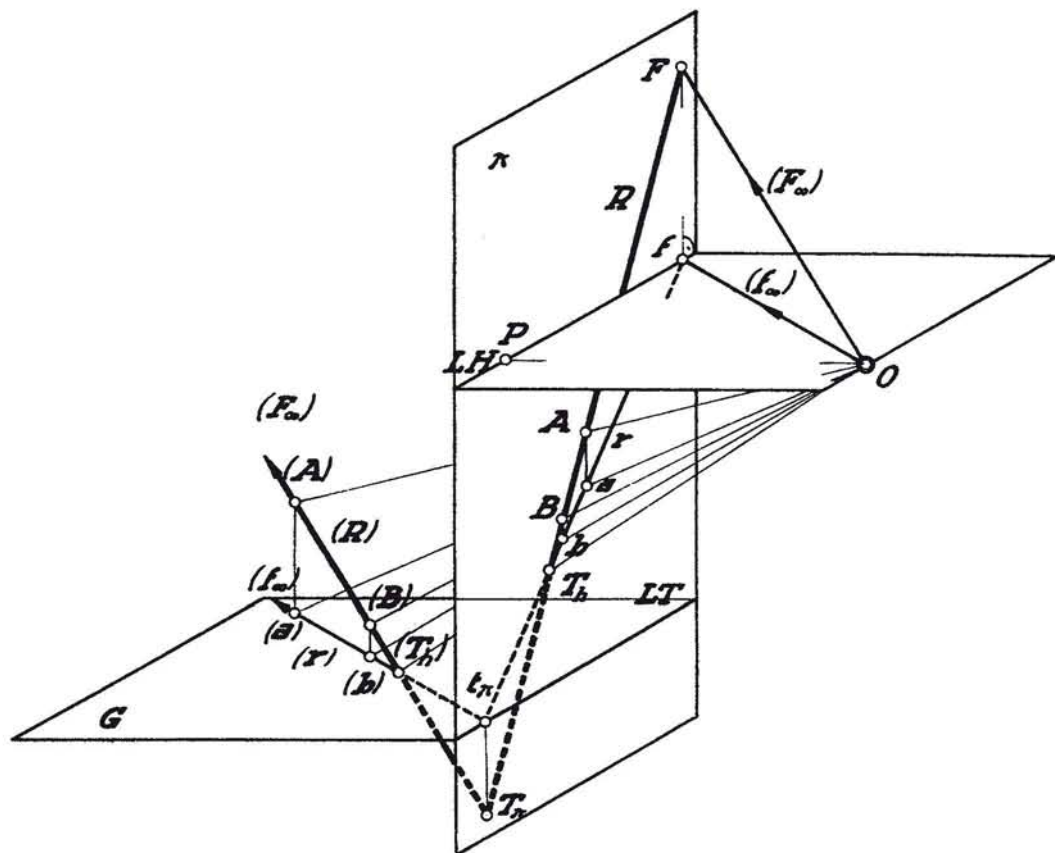
Observaciones importantes. La sola inspección de la posición de la proyección horizontal de un punto con respecto a la línea de tierra LT y de la línea de horizonte LH , nos indicará su posición en el espacio, pues en este sistema se verifica una relación de dependencia entre las zonas del plano del cuadro π y del plano geometral G , que aparecen rayadas en las figuras 157 y 158, es decir, la región *ilimitada* (X) corresponde a la región *finita* del plano del cuadro X comprendido entre la línea de tierra LT y la línea de horizonte LH .

La parte *limitada* (Y) del plano geometral comprendida entre la línea de tierra y el plano de desvanecimiento, corresponde a la parte infinita Y_{∞} de dicho plano del cuadro, situada por debajo de la línea de tierra, y la región *infinita* (Z) del geometral comprendida entre el plano de desvanecimiento y el infinito, corresponde también a la parte *infinita* Z_{∞} del plano de cuadro, por encima de la línea de horizonte.

Obsérvese que en las figuras en cuestión están rayadas en el mismo sentido las partes correlativas de los dos planos.

Habrà de tenerse también en cuenta para analizar la posición del punto, si su proyección directa se halla por encima o por debajo de su proyección horizontal, a fin de determinar si su cota es positiva o negativa; es decir, si se halla situado el punto por encima o por debajo de dicho plano geometral.

Bastará, por tanto, unir las proyecciones $\overline{A-B}$ y $\overline{a-b}$ para obte-



ner las de la recta R y r , respectivamente. Existen varios puntos notables de esta recta:

2.º La traza horizontal (T_h), punto de altura cero, o común a la recta del espacio (R) y a su proyección horizontal (r), que necesariamente se proyecta según T_h sobre el plano del cuadro, común también a la proyección directa R y a su proyección horizontal r (análogo al punto del geometral ($E—e$), figs. (157 y 158).

3.º La proyección del punto impropio $(F_\infty) - (f_\infty)$ de la recta.

Este punto impropio tiene representación en el plano del cuadro en un punto propio $F - f$ llamado *punto de fuga* de la recta o *punto límite*, y se obtiene, como es lógico, trazando por el centro de proyección O las rectas paralelas a (R) y (r) , es decir, uniendo O con (F_∞) y con (f_∞) , respectivamente.

Obsérvese que f se hallará siempre situado sobre la línea de horizonte LH y que F estará sobre la perpendicular a dicha línea de horizonte trazada por f .

Lo expuesto anteriormente queda de manifiesto en la figura 160, en que se ha hecho coincidir el plano del cuadro con el plano del dibujo,

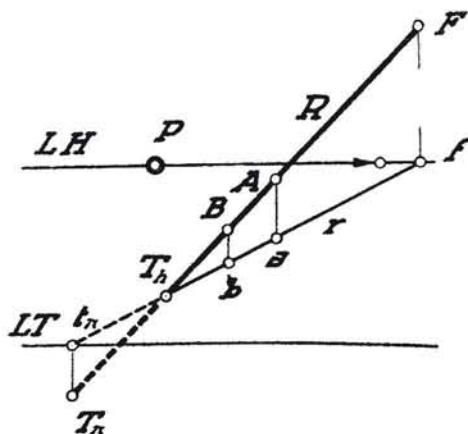


Fig. 160. — Sistema cónico: Representación de la recta y delimitación de sus partes vista y oculta.

Alfabeto de la recta.

Recta paralela al geometral. (Fig 161.) Su traza, es decir, su punto

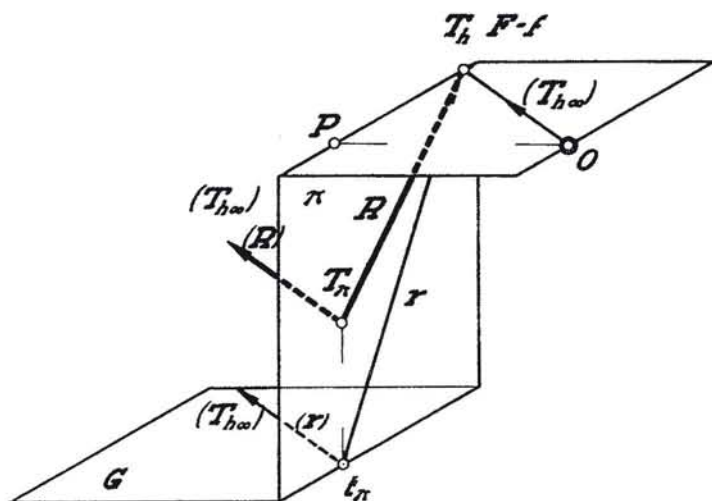


Fig. 161. — Sistema cónico: Recta horizontal o paralela al geometral.

de altura cero, es impropio: $(T_{h\infty})$ pero tiene su representación en el punto T_h de la línea de horizonte, obtenido al trazar por O el rayo proyectante, paralelo a la recta en cuestión $(R) - (r)$. El punto T_h es el

que antes hemos llamado punto de fuga de la recta $F-f$, que es común a la proyección directa y a la proyección horizontal, por ser éstas paralelas, y que llamaremos como siempre punto de fuga o límite de la recta representada, la cual aparece en el plano del dibujo de la figura 162, con las mismas notaciones que en la figura 161.

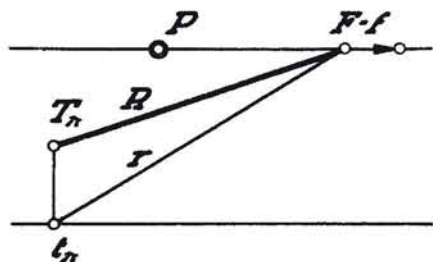


Fig. 162. — Sistema cónico: Representación de una recta horizontal.

Recta paralela al plano del cuadro. (Figuras 163 y 164.) Por ser esta recta paralela al plano del cuadro, no tendrá traza sobre él y, por tanto, $T_{\pi}-t_{\pi}$ es impropio, como también lo serán los puntos

de fuga de la recta y de su proyección horizontal.

Dadas estas características, la proyección horizontal r de la recta resulta ser paralela a la línea de tierra LT , careciendo, como se ve, de punto de fuga, que, como se recuerda, es siempre punto de encuentro de r con la línea de horizonte. La proyección directa podrá ser cualquiera.

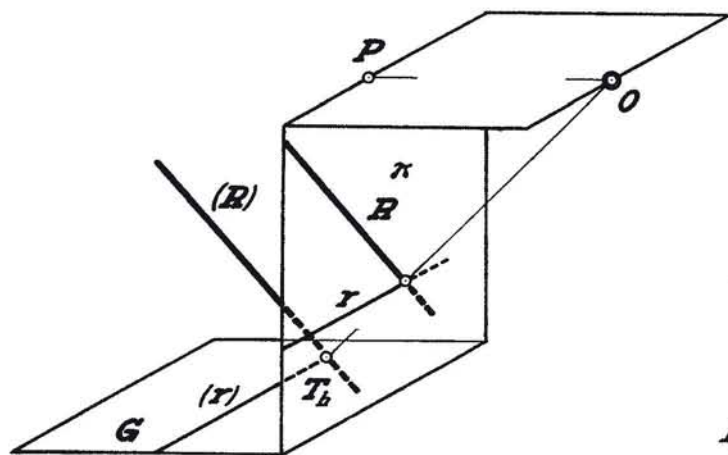


Fig. 163. — Sistema cónico: Recta paralela al plano del cuadro.

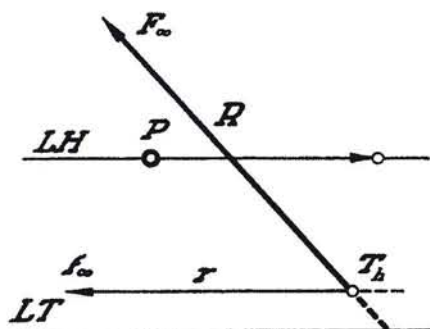


Fig. 164. — Sistema cónico: Representación de una recta paralela al plano del cuadro.

Recta situada sobre el plano geometral. (Figuras 165 y 166.) Esta recta $(R)-(r)$ está confundida con su proyección horizontal y, por tanto, las proyecciones $R-r$ de ambas en el plano del cuadro serán también confundidas. Lo mismo sucederá con sus trazas sobre el plano del cuadro T_{π} y t_{π} y con sus puntos de fuga $F-f$, que se hallarán situados en la línea de horizonte.

Recta situada en el plano del cuadro. (Figuras 165 y 166.) Es un caso particular del que hemos visto en relación con las figs. 163 y 164, en que la proyección horizontal s se confunde con la línea de tierra.

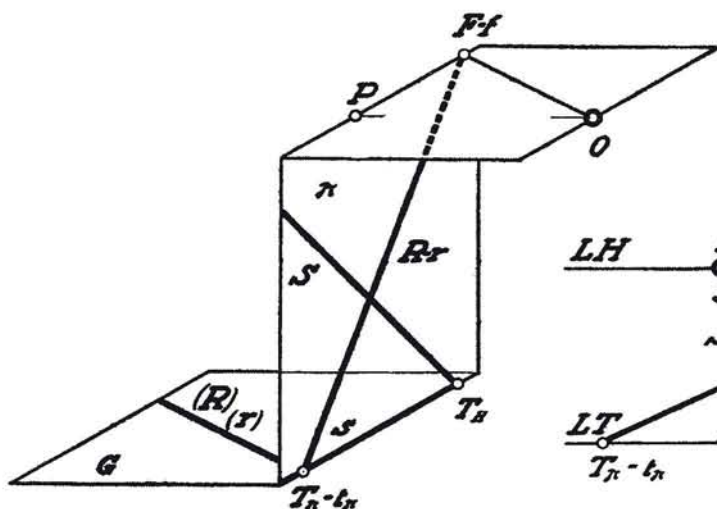


Fig. 165. — Sistema cónico: Rectas situadas sobre el plano geométral y sobre el plano del cuadro.

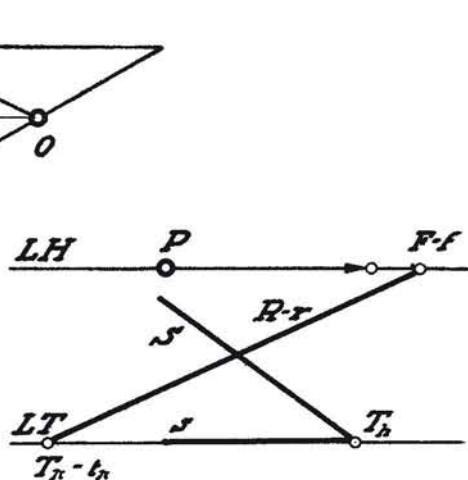


Fig. 166. — Sistema cónico: Representación de una recta situada sobre el plano geométral: $R-r$, y sobre el plano del cuadro: $S-s$.

Recta de punta con respecto al plano geométral. (Figuras 167 y 168.) Esta recta también es un caso particular de la paralela al plano del cuadro. Carecerá de traza sobre dicho plano y también de punto de fuga

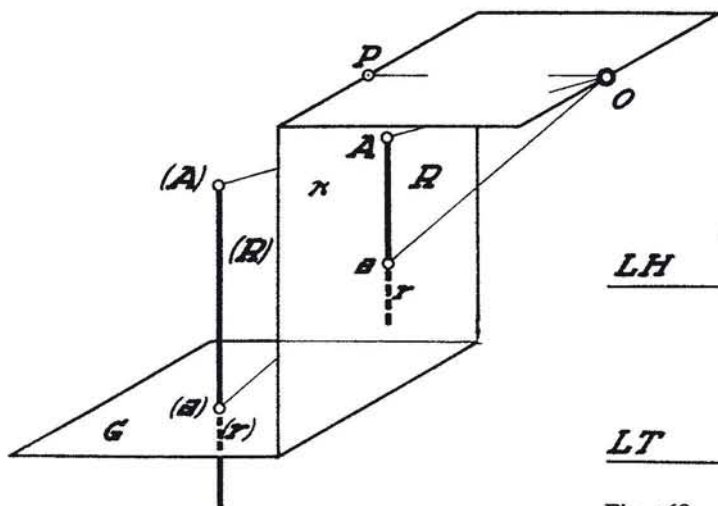


Fig. 167. — Sistema cónico: Recta perpendicular al plano geométral.

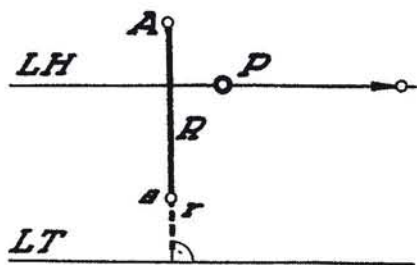


Fig. 168. — Sistema cónico: Representación de una recta perpendicular al plano geométral.

y su representación directa R será una recta perpendicular a la línea de tierra, reduciéndose su proyección horizontal r a un punto, motivo por el cual, todos los que ésta contiene, tal como $A—a$, tendrán su proyección horizontal coincidente con r .

Recta paralela a la línea de tierra. (Figuras 169 y 170.) Por tener esta recta (R)—(r) la posición de referencia, se podrá considerar como un caso particular de la paralela al plano del cuadro (figs. 163 y 164), y además, como caso particular de la paralela al plano geometral (figs. 161 y 162), por lo que carecerá de trazas sobre el plano π y sobre el plano G , resultando ser sus proyecciones $R—r$ paralelas a la línea de tierra y a la línea de horizonte, tal y como indica la figura 170.

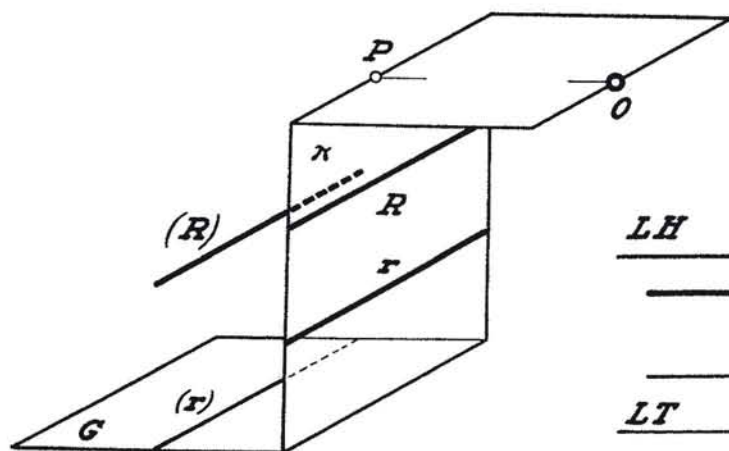


Fig. 169. — Sistema cónico: Recta paralela a la línea de tierra.

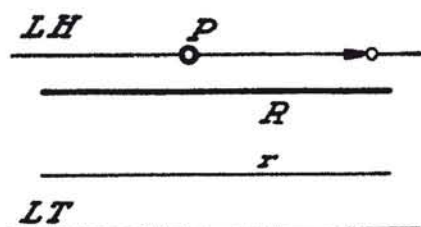


Fig. 170. — Sistema cónico: Representación de una recta paralela a la línea de tierra.

Recta de punta con respecto al plano del cuadro. (Figuras 171 y 172.) La recta en este caso ocupa una posición particular de la horizontal, carecerá de traza horizontal y tendrá como punto de fuga el punto principal P del sistema.

Por ser esta recta paralela a su proyección horizontal, ambas fugarán en el punto principal P como se indica en la figura 172.

Recta horizontal a 45° con el plano del cuadro. (Figuras 173 y 174.) Desempeñan estas rectas un papel importante en este sistema, motivo por el cual consideraremos su posición como interesante, aun siendo un caso particular de la horizontal, de la que ya hemos hablado al tratar de las figuras 161 y 162.

Esta recta, por ser horizontal, tiene su punto de fuga $F—f$ en la línea horizonte, en un punto que llamaremos D , *punto de distancia*, por ser el segmento $\overline{P—D} = \overline{P—O}$, puesto que se forma en el espacio el triángulo isósceles rectángulo $O—P—D$.

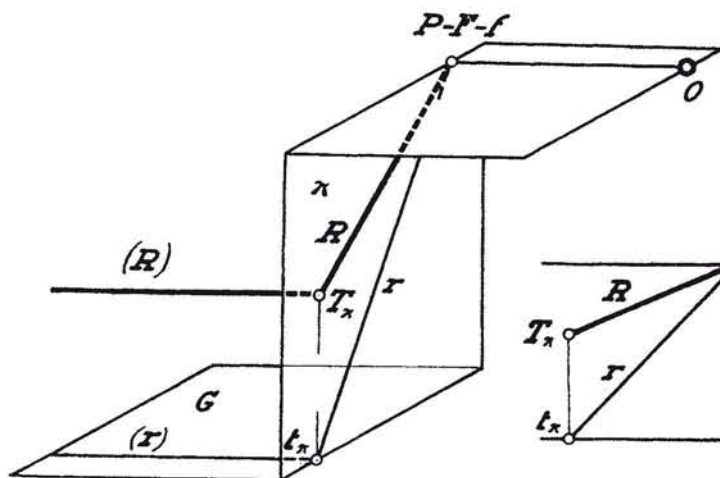


Fig. 171. — Sistema cónico: Recta perpendicular al plano del cuadro.

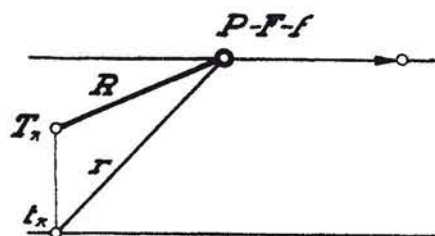


Fig. 172. — Sistema cónico: Representación de una recta perpendicular al plano del cuadro.

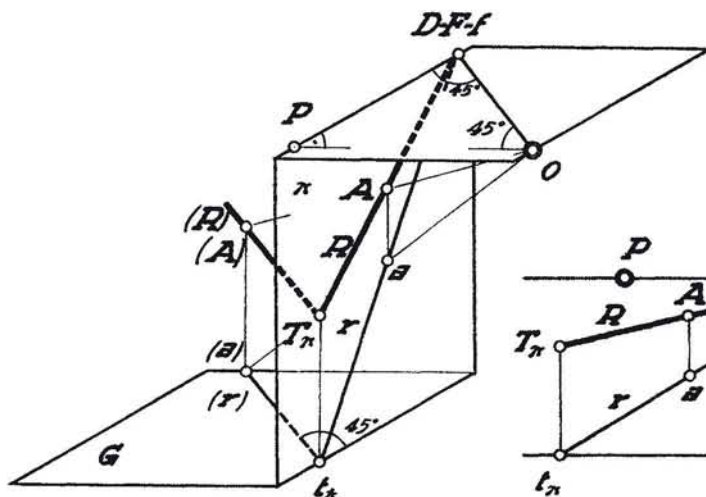


Fig. 173. — Sistema cónico: Recta horizontal que forma 45° con el plano del cuadro.

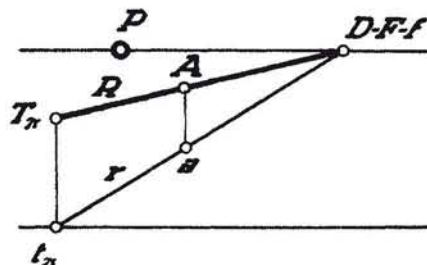


Fig. 174. — Sistema cónico: Representación de una recta horizontal que forma 45° con el plano del cuadro.

Recta cualquiera que forme 45° con el plano del cuadro. (Figuras 175 y 176.) Sea $(R)-(r)$ la recta en cuestión.

El punto de fuga $F-f$ de esta recta será un punto tal que los puntos P , F y O formarán asimismo un triángulo isósceles rectángulo en P , siendo, por tanto, sus catetos $P-O$ y $P-F$ iguales, con lo cual apreciamos que todos los puntos de la circunferencia situada en el plano del

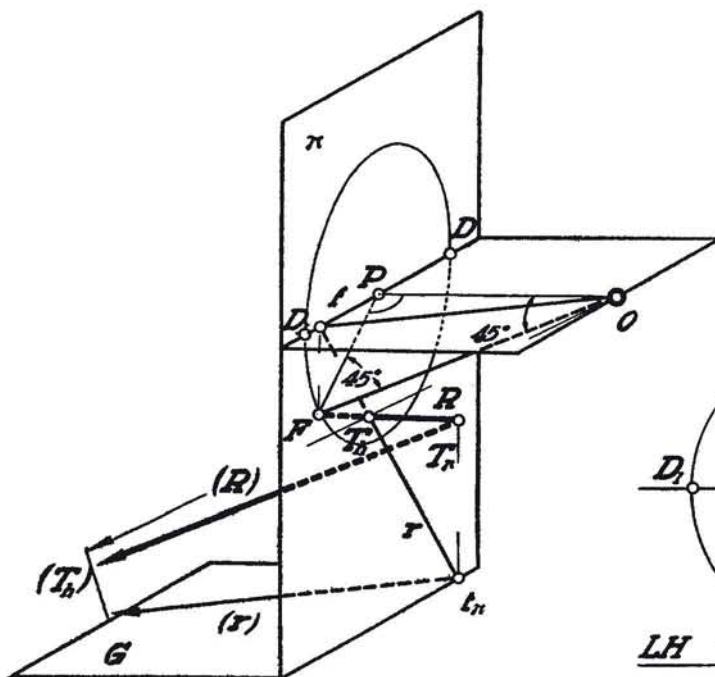


Fig. 175. — Sistema cónico: Recta que forma 45° con el plano del cuadro.

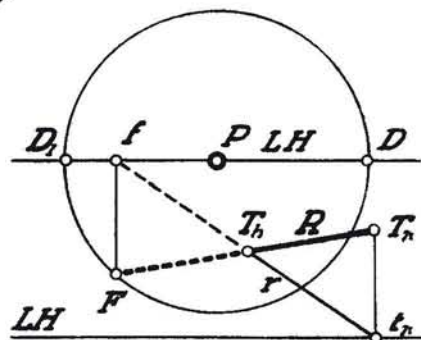


Fig. 176. — Sistema cónico: Representación de una recta que forma 45° con el plano del cuadro.

cuadro de centro P y radio $P-O = P-D$ pueden ser puntos de fuga de rectas que cumplen con la condición de formar 45° con el plano del cuadro.

Obsérvese que el punto de fuga f de la proyección horizontal r , al proyectarse en la línea de horizonte, nos indica que la *proyección horizontal* r de la recta, *no formará* 45° con el plano del cuadro nada más que en dos posiciones particulares que quedan especificadas en el caso de las figuras 173 y 174; es decir, cuando su punto de fuga coincida con los puntos D o D_1 de la línea de horizonte.

Representación de la recta cuya traza horizontal pertenece al plano de desvanecimiento. (Figuras 177 y 178.) Sea la recta $(R)-(r)$, cuya traza horizontal (T_h) está contenida en el plano de desvanecimiento Δ ;

es decir, un punto de su traza con el plano geometral: *línea de desvanecimiento* LD.

Esta recta tendrá por punto de fuga: F , para la proyección directa R y f para la proyección horizontal r , resultando ser paralelas las proyecciones R y r por haberse de encontrar en la proyección $T_{h-\infty}$, pro-

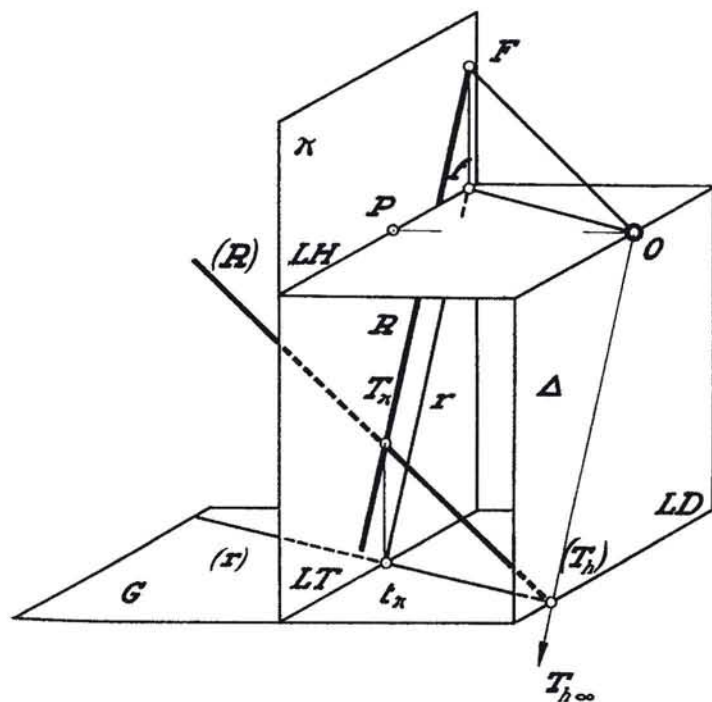


Fig. 177. — Sistema cónico: Recta cuya traza horizontal se halla en el plano de desvanecimiento.

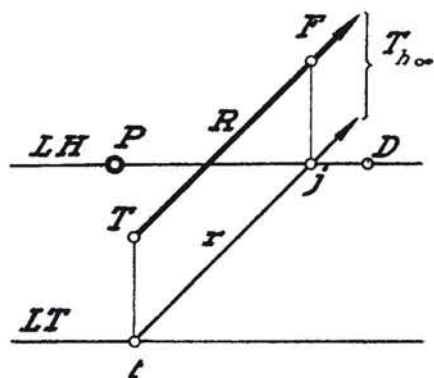


Fig. 178. — Sistema cónico: Representación de una recta cuya traza horizontal es un punto de la línea de desvanecimiento.

yección de (T_h) que, como sabemos, según las figuras 157 y 158, punto (K) — (k) , se proyecta sobre el plano del cuadro según una dirección.

Observaciones. En este sistema de representación, cuando una recta y su proyección son paralelas, es preciso tener presente que son concurrentes en un punto de la *línea de desvanecimiento* LD, y lo mismo sucederá cuando dos proyecciones directas de dos rectas sean paralelas después de proyectadas sobre π , pues ello nos indicará que, efectivamente, tienen común un punto de dicho plano de desvanecimiento Δ .

Recta que corta a la línea de tierra. (Figuras 179 y 180.) Esta recta tiene la particularidad de que se confunden sus trazas T_h horizontal y $T_v=t_v$, sobre el plano del cuadro, pudiendo ser cualquiera su punto de fuga $F=f$, lo que se aprecia en la figura 180.

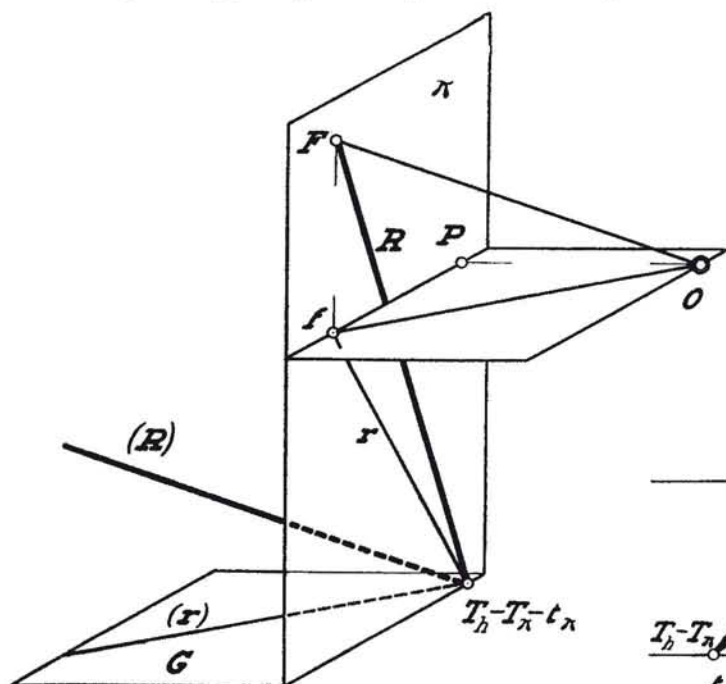


Fig. 179. — Sistema cónico: Recta que corta a la línea de tierra.

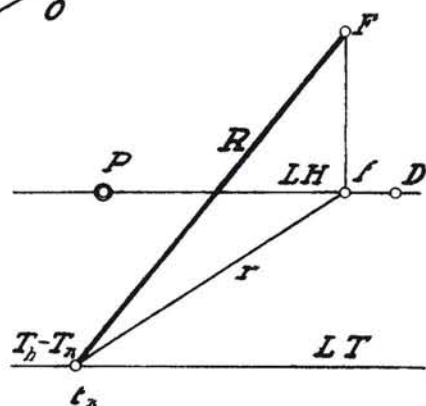


Fig. 180. — Sistema cónico: Representación de una recta que corta a la línea de tierra.

Recta de perfil. (Figuras 181 y 182.) Por analogía con lo que en el sistema diédrico sucede, al compararlo con éste en que los planos de proyección H y V que lo integran son aquí G y π , respectivamente, llamaremos recta de perfil (R), a aquella cuya proyección horizontal (r) es perpendicular a la línea de tierra, por lo que su representación en el plano del dibujo tendrá como única particularidad el que su proyección horizontal r fuga en el punto principal P , comportándose en todo lo demás esta recta como si fuera cualquiera.

Representación del plano. (Figuras 183 y 184.) Ya hemos visto en los demás sistemas de representación que el plano viene determinado por tres de sus puntos; pero no siendo cómodo su manejo con sus proyecciones, obtendremos su representación mediante sus trazas: una sobre el plano π y la otra sobre el plano G .

Sea (S) el plano cuya traza con el geometral es (s), siendo T_s su traza con el plano del cuadro.

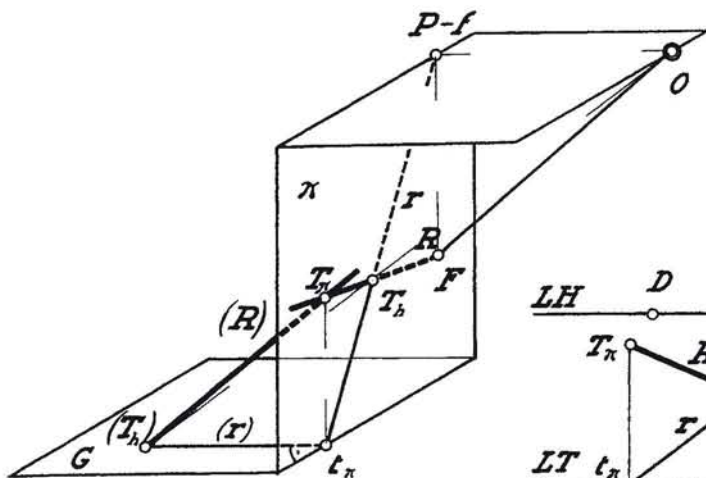


Fig. 181. — Sistema cónico: Recta de perfil.

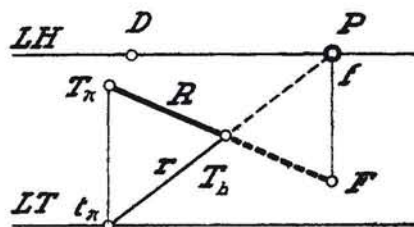


Fig. 182. — Sistema cónico: Representación de una recta de perfil.

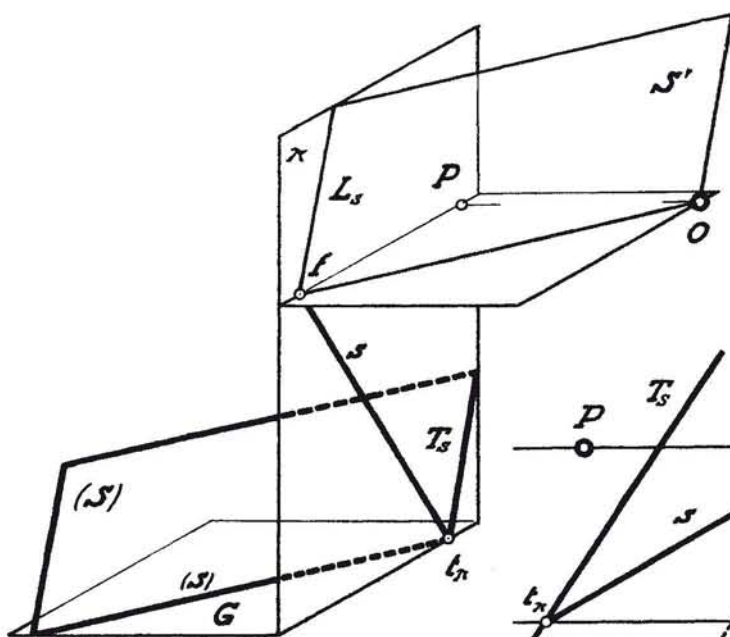


Fig. 183. — Sistema cónico: Proyección del plano.

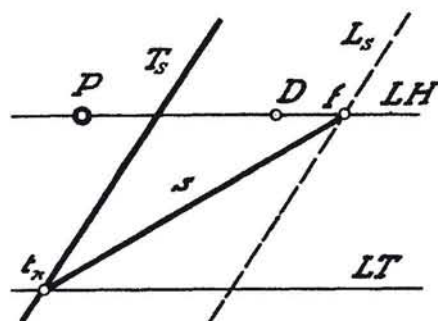


Fig. 184. — Sistema cónico: Representación del plano.

La proyección de la traza horizontal s será una recta que pase por el punto de encuentro t_π de la traza T_s con la línea de tierra, y habrá de tener su punto de fuga f en la línea de horizonte.

Por consiguiente, su representación en el plano del dibujo (fig. 184) estará integrada por la traza T_s y por s , proyección de su traza horizontal.

Pudiéramos también representar el plano mediante su traza T_s y la proyección de su recta impropia, que será la L_s , traza del plano del cuadro con el paralelo S' a S trazado por O , y que necesariamente será el lugar geométrico de los puntos de fuga de todas las rectas del plano (S), y por tanto, de la s : f . Esto nos dice que dicha recta L_s , llamada *recta límite del plano*, habrá de ser paralela a T_s y de pasar

por f , quedando resumida la representación del plano en este sistema, en general, a dos rectas paralelas, una de las cuales es su traza con el plano del cuadro T_s y la otra su recta límite L_s .

Nota: Obsérvese que la región ilimitada del plano (S) comprendida entre su traza T_s y el ∞ está representada en el plano del cuadro por su región finita $T_s - L_s$.

Determinación de las rectas anteriores cuando el plano está dado por tres puntos. (Fig. 185.) Sean $A - a$, $B - b$, $C - c$ los tres puntos determinativos del plano.

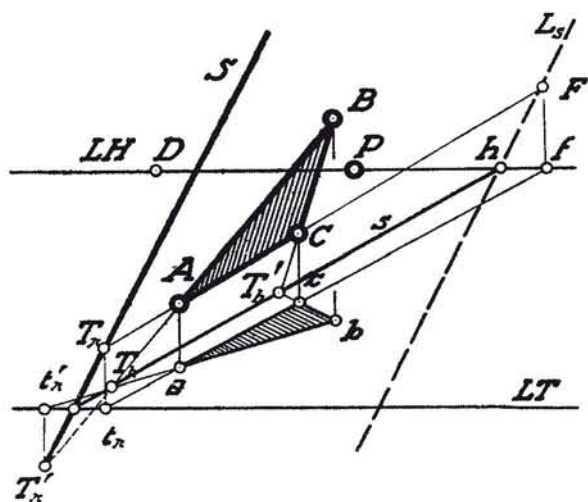


Fig. 185. — Sistema cónico: Representación de un plano dado por tres puntos.

Empezaremos por hallar las trazas T_π , t_π de la recta integrada por los puntos $A - C$, $a - c$, por ejemplo, teniendo esta recta como punto de fuga el $F - f$.

Elegida otra recta $A - B$, $a - b$, obtendremos asimismo los puntos trazas t'_π y T'_π .

La unión de T_π con T'_π nos proporciona la traza S del plano con el cuadro, siendo su recta límite L_s la paralela a ella trazada por F , cuyo punto de encuentro h con la línea de horizonte LH nos da el punto de fuga de la traza horizontal s .

Como comprobación, en esta última recta s se hallan los puntos T_h y T'_h , trazas horizontales de las rectas $A - B$, $B - C$, respectivamente.

También se puede comprobar que sobre la recta límite L_s se hallan los puntos de fuga de otras rectas que constituyen el plano, propiedad que podemos utilizar cuando los puntos T_π caigan fuera de los límites del dibujo y nos sea más fácil el operar con los puntos impropios F .

Representación del plano dado por una recta y un punto. (Fig. 186.)
 Sea la recta $R-r$ y el punto $A-a$.

Empezaremos por hallar el punto de fuga $F-f$ de la recta $R-r$ y sus trazas $T_\pi-t_\pi$.

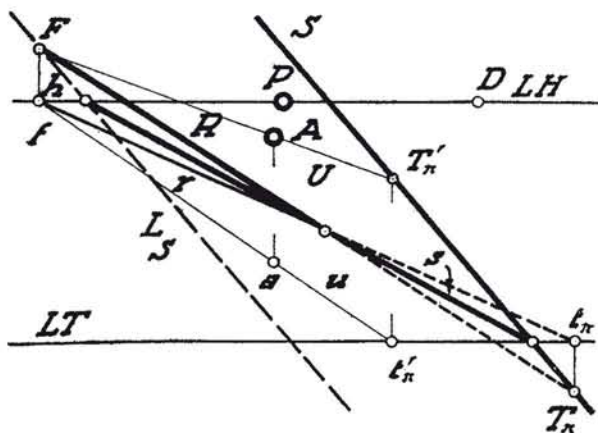


Fig. 186. — Sistema cónico: Representación de un plano dado por una recta y un punto.

Uniremos el punto dado $A-a$ con otro cualquiera de la recta $R-r$, siéndonos más cómodo, por hallarse ya determinado, su punto impropio $F-f$, con lo que habremos trazado la recta $U-u$, la cual tiene por traza el punto $T'_\pi-t'_\pi$. Este y T_π nos determinan la traza S del plano, y su paralela por F será su recta límite L_s , hallándose por medio de esta última, y utilizando su punto h de la línea de horizonte, la traza horizontal del plano s .

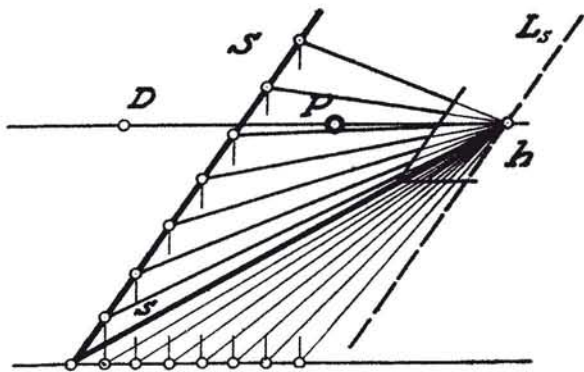
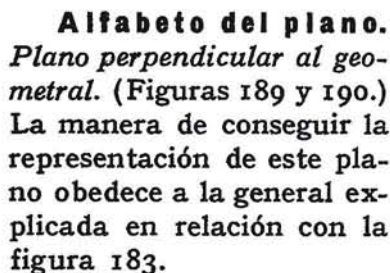


Figura 187. Dado un plano cualquiera $S-L_s$ vemos que, determinado h , punto de fuga de su traza horizontal s , podemos considerarlo como un haz de rectas horizontales, que siendo paralelas en el espacio, forman un haz convergente en h , fugando, asimismo, en el mencionado punto h las proyecciones de dichas horizontales.

características especificadas en lo relativo a las figuras 163 y 164.



Su única particularidad estriba en que su traza es perpendicular a la línea de tie-

estriba en que su traza
pendicular a la línea de tie-
s.

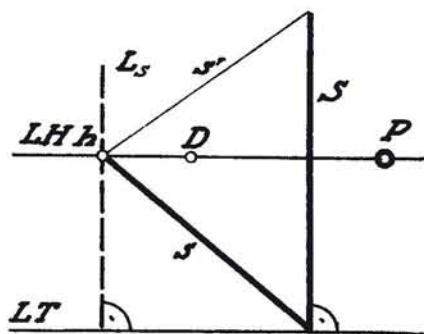


Fig. 190. — Sistema cónico: Representación de un plano perpendicular al geometral o proyectante horizontal.

a plano de esta naturaleza,
, hallándose situada la pri-
ntal.

Plano perpendicular a la línea de tierra. (Figuras 191 y 192.) Este plano es un caso particular del anterior, en que el punto de fuga h de sus horizontales coincide en el punto principal P , siendo también su

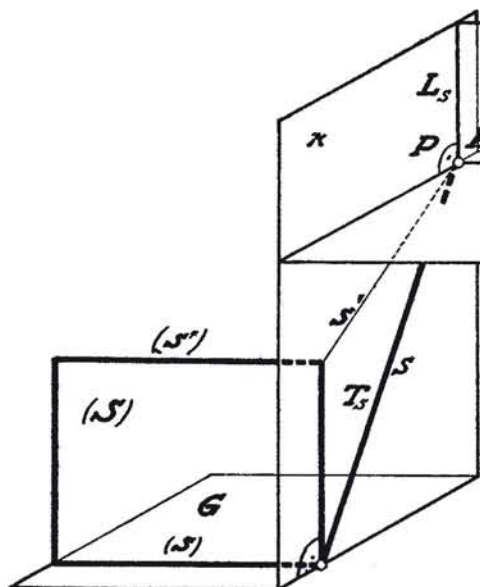


Fig. 191. — Sistema cónico: Plano perpendicular al del cuadro.

traza S perpendicular a la línea de tierra. El plano representado está limitado por su traza horizontal s y por otra horizontal s' .

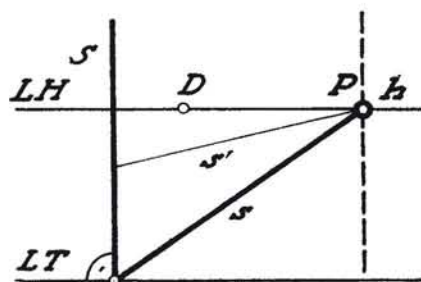


Fig. 192. — Sistema cónico: Representación de un plano perpendicular al del cuadro.

Plano paralelo a la línea de tierra. (Figuras 193 y 194.) En tal posición, tanto su traza T_s o S , como su recta límite L_s , tienen por representación rectas paralelas a la línea de tierra, que se determinarán en la forma sabida.

Para conseguir la traza horizontal s de este plano situaremos en él una recta cualquiera $R-r$, eligiendo dos pun-

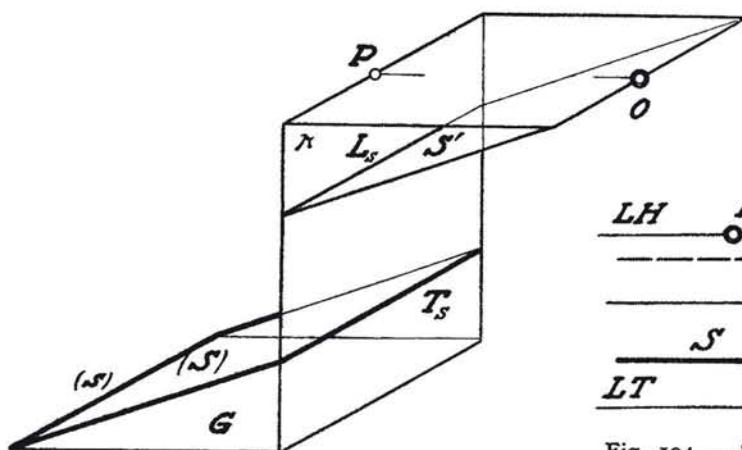


Fig. 193. — Sistema cónico: Plano paralelo a la línea de tierra.

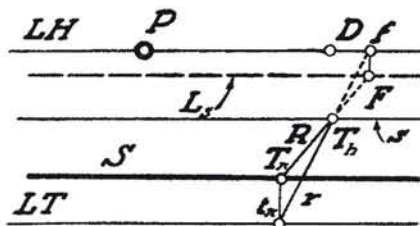


Fig. 194. — Sistema cónico: Representación de un plano paralelo a la línea de tierra, y determinación de su traza horizontal.

tos $T_\pi - t_\pi$ y $F - f$ situados sobre S y sobre L_S , respectivamente.

El punto T_H , traza horizontal de esta recta, nos dará un punto de s , que quedará determinada por ser también paralela a la línea de tierra.

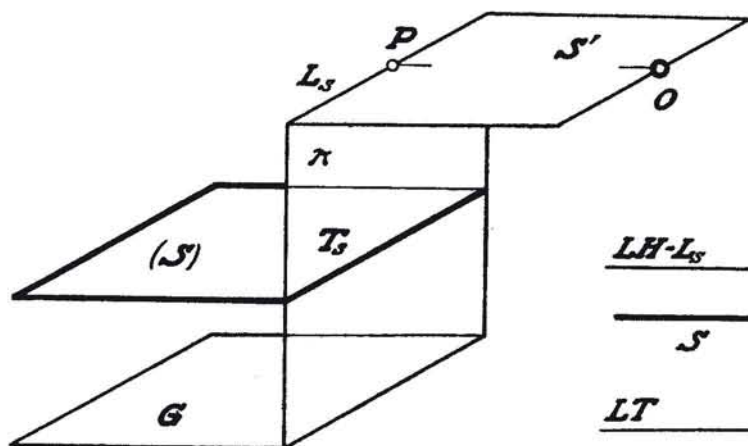


Fig. 195.—Sistema cónico: Plano paralelo al geometral u horizontal.

Plano paralelo al geometral. (Figuras 195 y 196.) Este caso es particular del ante-

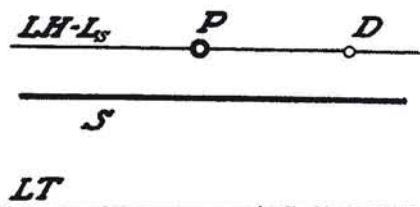


Fig. 196.—Sistema cónico: Representación de un plano horizontal.

rior cuando s , traza horizontal del mismo, es impropia, apreciándose que su traza S es paralela a la línea de tierra y que su recta límite L_S coincide con la línea de horizonte LH .

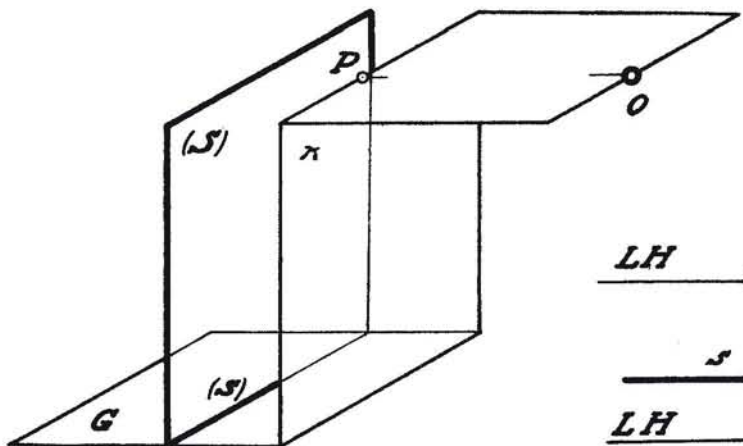


Fig. 197.—Sistema cónico: Plano paralelo al del cuadro.

Nota importante. Obsérvese que el plano geometral es tam-

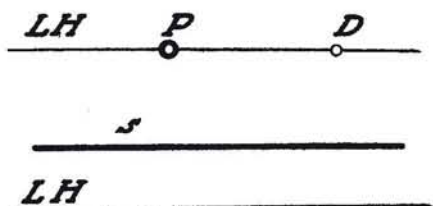


Fig. 198.—Sistema cónico: Representación de un plano paralelo al del cuadro.

bién un plano de las características indicadas más arriba, cuya traza es LT , siendo LH su recta límite.

Plano paralelo al del cuadro. (Figuras 197 y 198.) El plano (S) carece de traza sobre el plano π , y la correspondiente al plano geome-

tral s será la única que nos individualizará la posición de este plano en el del dibujo, ya que también su recta límite es la recta impropia del plano del cuadro.

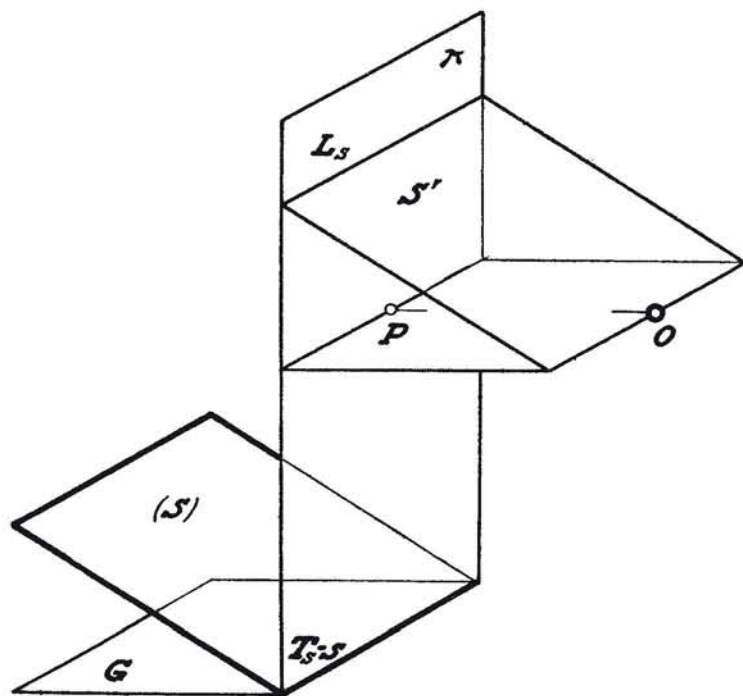


Fig. 199. — Sistema cónico: Plano que pasa por la línea de tierra.

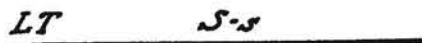
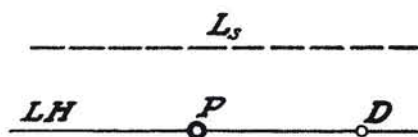


Fig. 200. — Sistema cónico: Representación de un plano que pasa por la línea de tierra.

Plano que pasa por la línea de tierra. (Figuras 199 y 200.) El plano S tiene sus trazas T_s — S — s confundidas con la línea de tierra, y su recta límite L_s paralela a la línea de tierra en una posición cualquiera del plano del dibujo.

Plano perpendicular al del cuadro. (Figuras 201 y 202.) El plano en cuestión S tiene como característica el que su traza sobre el plano geometral (s) es perpendicular a la línea de tierra, y por tanto ha de fugar en el punto principal P , no teniendo otra particularidad especial su representación.

Proyección de una forma plana. (Fig. 203.) Supongamos una forma plana $A-B-C \dots K-L$, situada en el plano $S-L_S$, cuya proyección

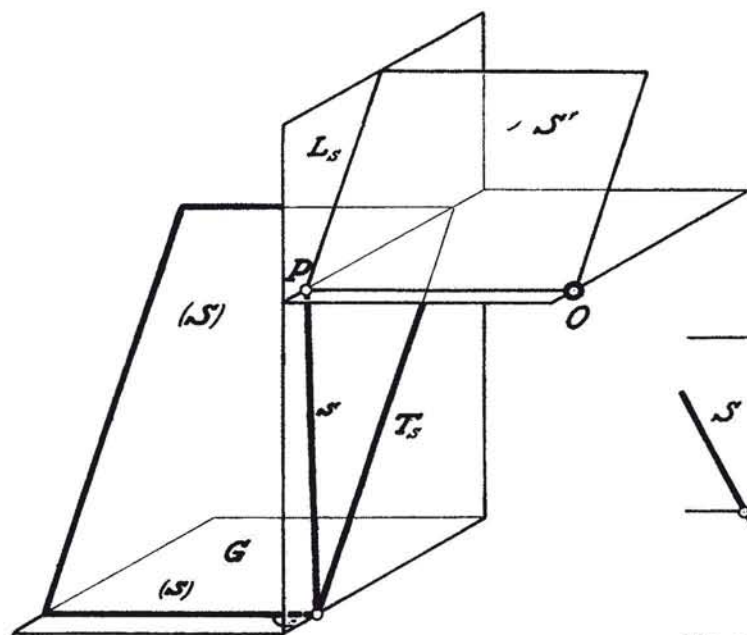


Fig. 201.—Sistema cónico: Plano perpendicular al del cuadro.

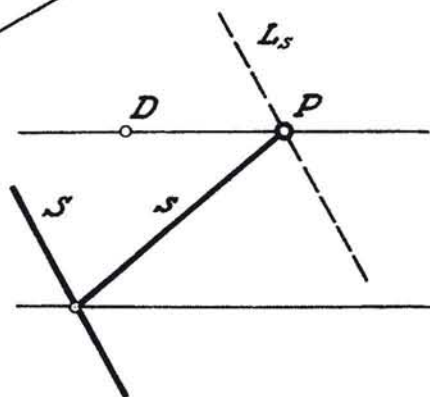


Fig. 202.—Sistema cónico: Representación de un plano perpendicular al del cuadro.

horizontal, o mejor dicho, sobre el plano geometral, tratamos de determinar en función de su proyección directa conocida.

El procedimiento consistirá en ir refiriendo los puntos proyección directa $A-B-C-D$, por ejemplo: de una recta R a su proyección r (f y t .) en $a-b-d-e$, respectivamente.

Esta construcción se puede repetir para cuantas rectas y puntos se consideren oportunos para la finalidad del problema.

Sin embargo, se simplificará notoriamente si nos atenemos a la relación de afinidad existente entre la proyección directa dada y su proyección horizontal, siendo la *dirección afín la perpendicular a LT*, y el *eje de afinidad la traza horizontal s del plano*, lo cual queda demostrado al considerar que la recta s , traza horizontal del plano, es el

lugar geométrico de las trazas horizontales de todas las rectas contenidas en él; o dicho de otro modo, es el lugar geométrico de todos los puntos dobles de la proyección directa de la recta y de su proyección horizontal, tal y como sucede con los puntos T_h de la recta $K-L-B-C$ $k-l-b-c$ y con T'_h de la recta $A-B-D-E$ $a-b-d-e$.

Como comprobación, los puntos tales

como el M y N situados en la traza S del plano, tendrán sus proyecciones horizontales $m-n$ sobre la línea de tierra.

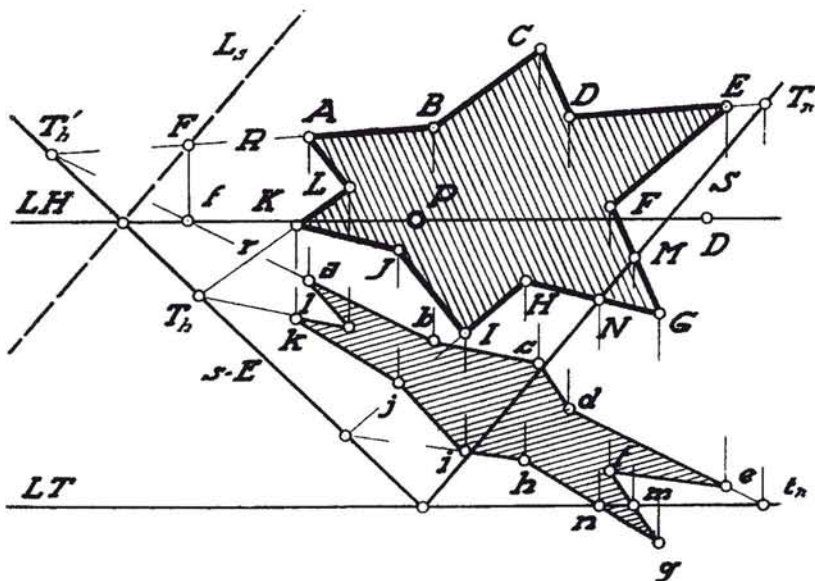


Fig. 203. — Sistema cónico: La proyección directa de una forma plana y su proyección horizontal, son afines.

Esta relación de afinidad, al ser reversible, nos permite obtener la proyección directa de una forma plana cuando conozcamos su proyección horizontal.

Situar un punto sobre un plano. (Fig. 204.) Dado un plano $S-L_s$, empezaremos por situar en él una recta cualquiera $R-r$ mediante dos de sus puntos, siendo los más cómodos los $T_\pi-t_\pi$ y $F-f$, elegidos sobre la traza y la recta límite L_s , respectivamente. Un punto cualquiera

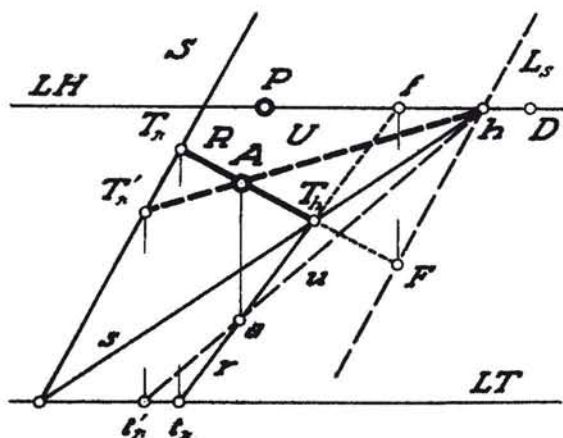


Fig. 204. — Sistema cónico: Colocación de un punto sobre un plano.

de esta recta: $A-a$ estará sobre el plano.

Será más cómoda la resolución, por ahorrarse una construcción, el

elegir una horizontal del plano: $U-u$ partiendo de su traza $T'_{\pi}-t'_{\pi}$, pues sabemos que su punto de fuga es el punto h de la línea de horizonte situado en L_s ; también pudiéramos haber logrado otra solución eligiendo previamente un punto T_h de s , traza horizontal del plano; en combinación de $T'_{\pi}-t'_{\pi}$, por ejemplo; pero esto nos implica el trazado previo de esta última recta, resultando más favorable la utilización de la horizontal $U-u$, como ya queda indicado.

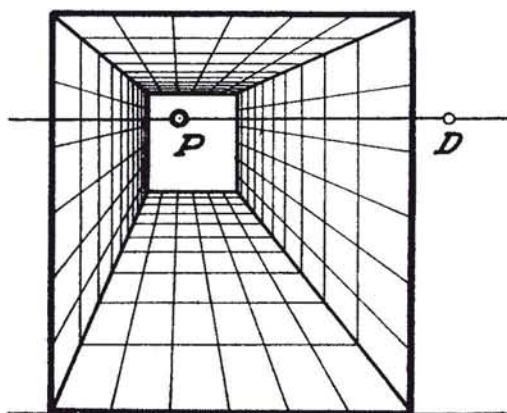


Fig. 205. — Sistema cónico: Utilidad del sistema cónico como sistema representativo.

Figura 205. Para que el lector pueda apreciar las posibilidades que encierra este sistema de representación en cuanto a la *visión de conjunto del espacio con su sola proyección directa*, en la figura de referencia se han representado únicamente tres planos, dos de ellos perpendiculares a la línea de tierra (véanse figuras 191 y 192) y uno horizontal, situado por encima del plano de horizonte. Estos tres planos, y el geometral, en la porción común a ellos, han sido divididos en recuadros mediante horizontales y frontales, pudiendo apreciarse con esta distribución la impresión de relieve que da esta figura, la cual bien pudiera representar la parte interior de una habitación o local análogo.

CAPITULO VII

INTERSECCIÓN DE PLANOS Y DE RECTAS Y PLANOS

Resolución en los cuatro sistemas de representación.

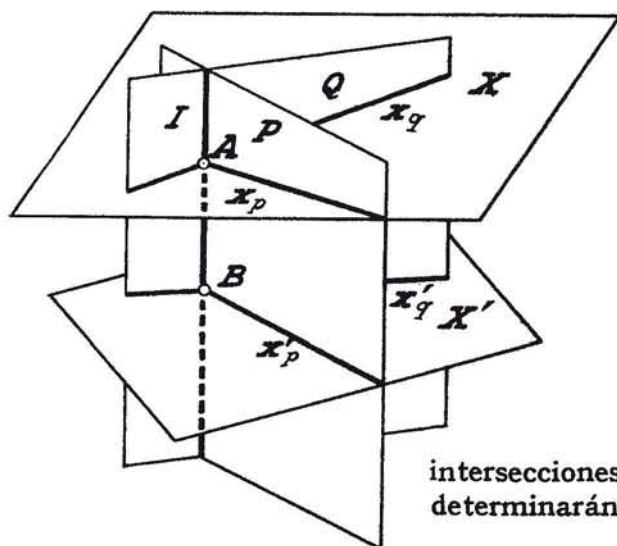


Fig. 206. — *Procedimiento general de determinación de la intersección de dos planos.*

Vamos a ver que el contrasentido aparente de esta construcción desaparece cuando sepamos elegir convenientemente los planos auxiliares $X-X'$.

Sistema acotado. (Fig. 207.) Supongamos los planos $P-Q$, cuya intersección I vamos a determinar. Empecemos por elegir como primer plano auxiliar, el de representación π , cuyas trazas $p-q$ cono-

Procedimiento general. (Fig. 206.) Sean dos planos $P-Q$ cuya intersección vamos a determinar. Por ser ésta una recta, bastará conocer dos de sus puntos, A y B . La forma de conseguirlos, aunque ello parezca paradójico, va a consistir en utilizar dos planos auxiliares cualesquiera, X y X' , que nos producirán a su vez las intersecciones x_p-x_q y $x'_p-x'_q$, las cuales determinarán los puntos en cuestión.

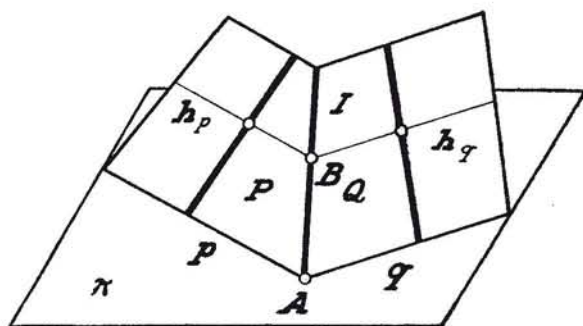


Fig. 207. — *Intersección de dos planos en el sistema acotado.*

ceremos inmediatamente; su punto de encuentro A ha de pertenecer evidentemente a la intersección buscada.

Tomemos luego como segundo plano auxiliar otro paralelo a π , que nos determinará las horizontales h_p y h_q ; por estar situadas a la misma altura y en el mismo plano, se cortarán en el punto B , que con el anterior nos define la intersección I .

En la figura 208 aparecen los planos dados por sus líneas de máxima pendiente P y Q , de puntos extremos $(0), (+5)$ y $(0), (+7)$, respectivamente.

Las trazas horizontales $p-q$ nos dan el punto A de altura cero y el horizontal trazado a la altura $(+4)$: h_p y h_q , que nos proporcionan punto $B(+4)$, quedando así determinada la intersección I pedida.

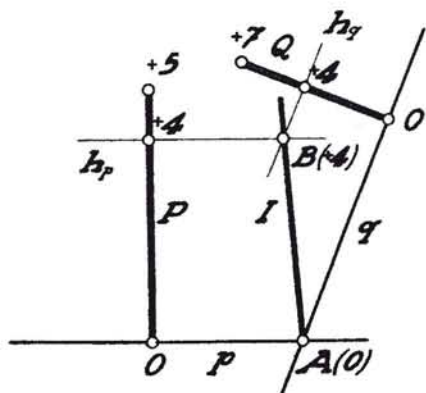


Fig. 208. — Sistema acotado: Realización de la intersección de dos planos.

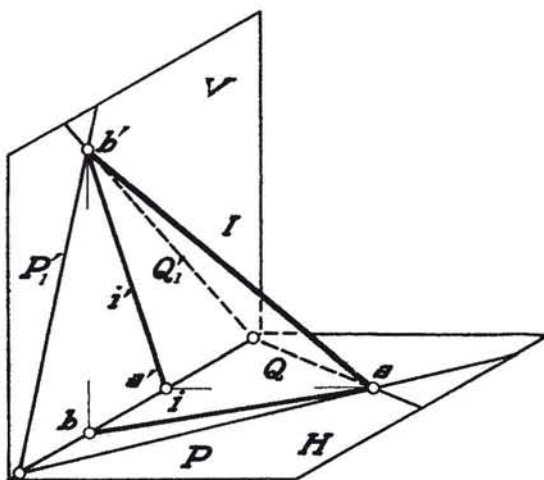


Fig. 209. — Método general para hallar la intersección de dos planos en el sistema diédrico.

Sistema diédrico. (Fig. 209.) Sean los planos $P-P'$ y $Q-Q'$, cuya intersección I vamos a determinar.

Elijamos como plano auxiliar el horizontal de proyección H , que, al contener las trazas horizontales $P-Q$, nos da el punto $a-a'$, de la intersección, y eligiendo asimismo el plano vertical de proyección V , con las trazas verticales $P'-Q'$, obtenemos el punto $b-b'$, con lo cual queda definida la intersección I , cuyas proyecciones $i-i'$ serán las rectas de unión de las proyecciones homónimas $a-b$ y $a'-b'$, respectivamente.

Figura 210. En el plano de representación se efectúan las operaciones indicadas en el espacio por la figura anterior, donde será cambiada la denominación del punto $a-a'$ por $h-h'$, al ser este punto traza horizontal de la intersección buscada; el punto $b-b'$ es ahora el

$v-v'$, por ser a su vez traza vertical de la intersección $i-i'$, que viene definida uniendo $h-v$ y $h'-v'$, respectivamente.

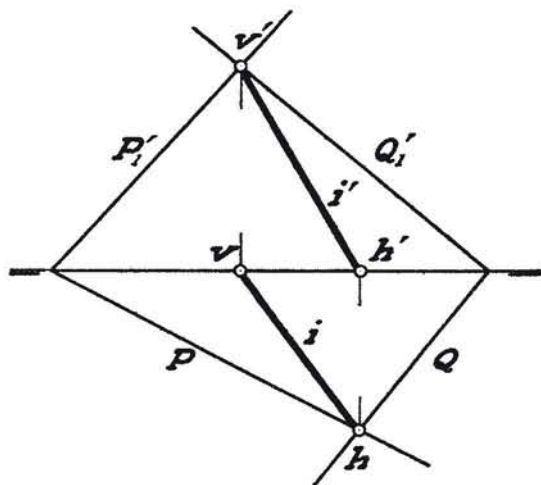


Fig. 210. — Sistema diédrico: Obtención de la intersección de dos planos.

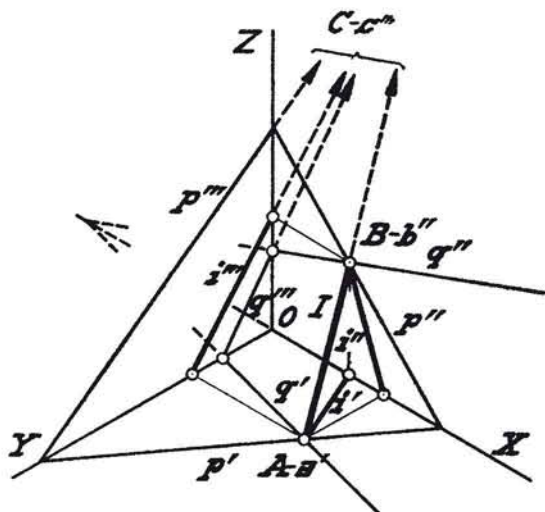


Fig. 211. — Sistema axonométrico: Obtención de la intersección de dos planos.

Sistema axonométrico. (Fig. 211.) Los planos vienen dados por sus trazas $p'-p''-p'''$ y $q'-q''-q'''$. Elijamos como planos auxiliares los formados por las caras $X-O-Y$ y $X-O-Z$, que nos proporcionarán los puntos $A-a'$ y $B-b''$, respectivamente, con lo cual queda conocida la intersección deseada I , cuyas proyecciones $i'-i''-i'''$ se obtendrán en la forma habitual.

Como comprobación habrán de corresponderse en el mismo punto de I las trazas q''' , p''' y la proyección i''' , es decir, en el punto $C-c'''$ situado en la cara del triedro $Y-O-Z$.

Sistema cónico. (Figura 212.) Los planos están dados por $P-L_p$ y $Q-L_q$.

Elijamos el del cuadro como plano auxiliar, y entonces aparece el punto común del mismo, $A-a$.

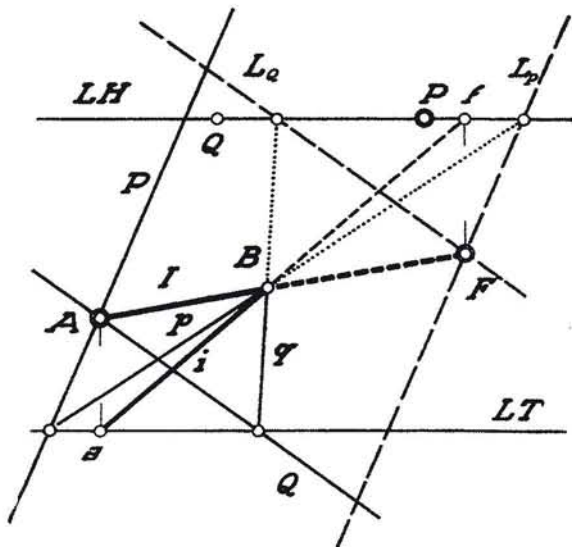


Fig. 212. — Sistema cónico: Obtención de la intersección de dos planos.

Si nos auxiliamos del geometral, entonces las trazas p y q nos dan otro punto B de la intersección, quedando ésta definida: $I-i$.

Nos será, sin embargo, más cómodo, en general, el utilizar como plano auxiliar el plano impropio, debiendo operar entonces con las rectas límites, que nos dan los puntos de fuga $F-f$ de la recta de intersección buscada.

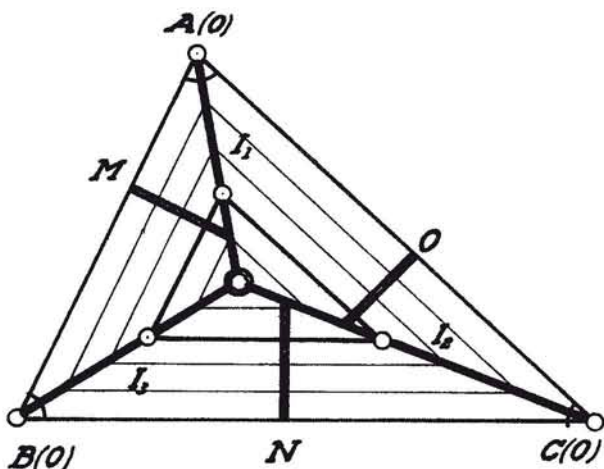


Fig. 213. — Espacio triangular a cubrir con vertientes de igual pendiente.

Determinación de las aristas de vertientes de tejados, utilizando el sistema acotado. (Fig. 213.) Podemos ya utilizar los sencillísimos conocimientos adquiridos hasta ahora para conseguir una aplicación de carácter eminentemente práctico. Supongamos se trata

de cubrir un espacio triangular representado por los puntos $A-B-C$, todos ellos de cota cero, o sea situados en el plano de referencia. La pendiente de las vertientes es igual para las tres caras y viene dada por sus líneas de máxima pendiente $M-N-O$. Estas, convenientemente graduadas, nos permiten el trazado de horizontales de los planos, paralelas a los lados del triángulo a cubrir, cuyos puntos de intersección, dos a dos, nos determinan las aristas $I_1-I_2-I_3$, que, en este caso, por ser de igual pendiente las vertientes, coinciden con las bisectrices de los ángulos del triángulo, las cuales, como sabemos, se cortan en un único punto.

Cuando, como en el caso de la figura 214, las pendientes de las vertientes: $M-N-O$, son distintas, las aristas $I_1-I_2-I_3$, no serán las bisectrices de los ángulos, pero se determinan fácilmente utilizando un plano auxiliar paralelo al de referencia, de altura $+2$, por ejemplo, que nos

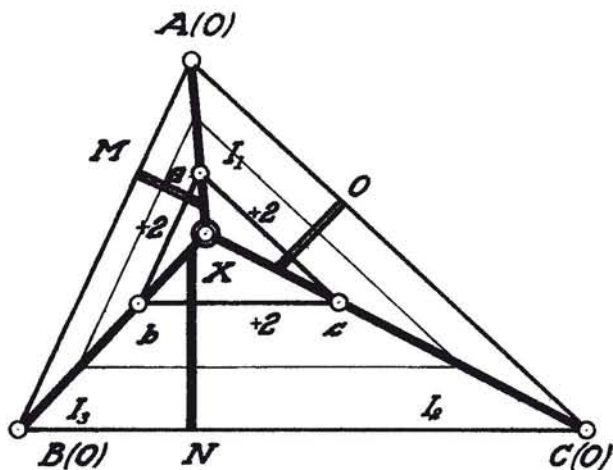


Fig. 214. — Espacio triangular a cubrir con vertientes de pendientes distintas.

permite hallar los puntos $a-b-c$, con los que quedan ya determinadas las intersecciones deseadas.

Es de observar que también en este caso las tres aristas en cuestión se cortan en el mismo punto X , por la razón de ser este punto centro de homotecia de los dos triángulos $A-B-C$ y $a-b-c$, que siempre son homotéticos por tener sus lados paralelos (formados por las trazas de los planos y por horizontales de los mismos).

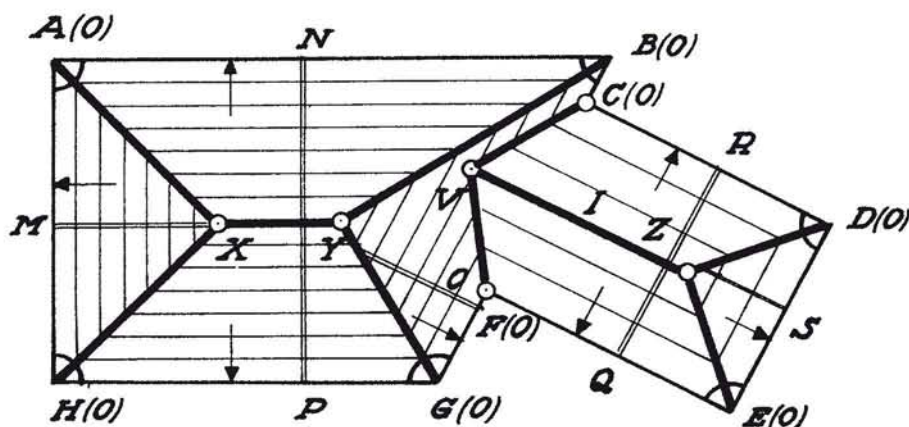


Fig. 215. — Aristas de tejados con anexo de pendiente distinta.

Figura 215. En este caso, el espacio a cubrir está formado por el polígono $A-B-C-D-E-F-G-H$, conjunto que está integrado por dos cuadriláteros, $A-B-G-H$, cuerpo principal de un edificio, y $C-D-E-F$, cuerpo anexo al mismo.

La condición dada es que las cuatro vertientes correspondientes al primer cuadrilátero tienen igual pendiente, indicada por sus líneas $M-N-O-P$, de idéntico intervalo, sucediendo lo propio con las tres caras del cuadrilátero $G-D-E-F$, cuyas líneas de máxima pendiente $Q-R-S$ son iguales entre sí, pero distintas de las del cuadrilátero anterior.

Las intersecciones de las vertientes correspondientes al primer cuadrilátero quedan definidas con la determinación de los puntos $X-Y$ procedentes de los comunes a las bisectrices de sus ángulos. De igual manera quedará conseguido el punto Z del segundo cuadrilátero, por ser $Z-D$ y $Z-E$ las bisectrices de los ángulos D y E , respectivamente.

La intersección I de las dos vertientes correspondientes a los lados $C-D$ y $E-F$ quedará también definida por ser horizontal, hallándose su punto V de intersección con la vertiente $B-G-Y$, al analizar cuál es la horizontal de dicha vertiente, que se halla a la misma altura que I , medida ésta sobre la línea de máxima pendiente, R o Q .

Conocido el punto V , común a la recta I y a la vertiente $C-D$, se completará la intersección trazando las rectas $V-C$ y $V-F$.

Figura 216. En este caso, el espacio a cubrir es el mismo que el de la figura anterior; pero con la particularidad de que ahora los puntos del cuadrilátero $C-D-E-F$ se hallan todos afectados de la cota (-1) .

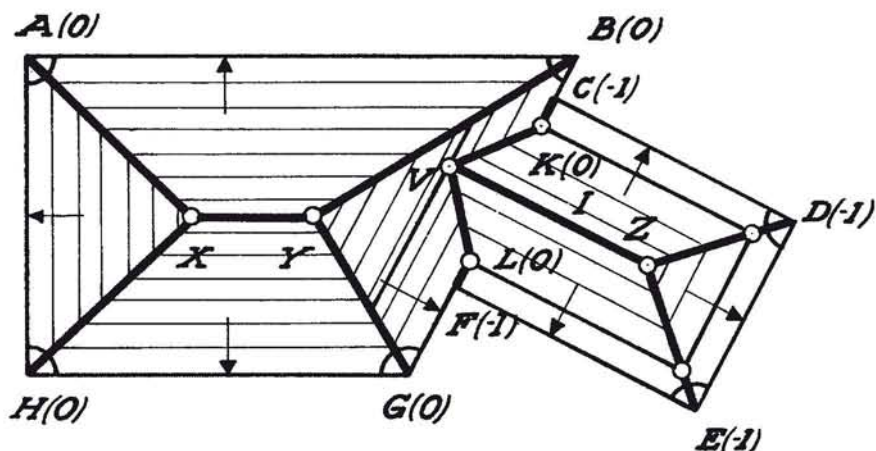


Fig. 216. — Los puntos de arranque del cuerpo principal $A-B-G-H$ son distintos de los del anexo $C-D-E-F$.

La determinación de los puntos $X-Y-Z-V$ se consigue de la misma manera que en el caso de la figura 215; pero para la determinación de las intersecciones de las vertientes correspondientes a $\overline{C-D}$ y a $\overline{E-F}$ con la de $\overline{G-B}$, habremos de tener en cuenta que el punto C ,

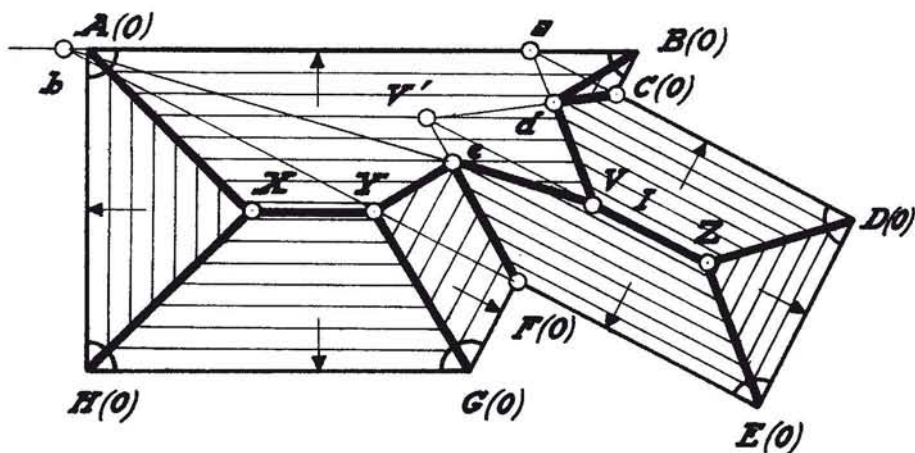


Fig. 217. — Las pendientes del cuerpo anexo $CDEF$ son mayores que las del cuerpo principal $ABGH$.

así como el F , no se hallan a la misma altura que la recta $\overline{G-B}$, motivo por el cual determinaremos los puntos K y L de cotas cero situados en las vertientes en cuestión, y que habrán de unirse con el punto V para que quede así completada la distribución de las aristas.

Figura 217. En las mismas circunstancias que en los casos anteriores, nos encontramos con que la recta I no corta a la vertiente del lado $\overline{G-D}$ en un punto situado dentro del triángulo $\overline{B-Y-G}$ que le corresponde, y entonces tendremos que prolongar la vertiente correspondiente al lado $\overline{A-B}$ hasta su encuentro con la arista correspondiente, y esto se consigue aplicando el caso ya resuelto en ocasión de la figura 208, en que se hallan las intersecciones de estos dos planos utilizando los puntos a y b en que se cortan las trazas horizontales de las distintas vertientes, y uniéndolas con V , determinado en la misma forma que en los casos anteriores; es decir, buscando la horizontal de la vertiente de $\overline{A-B}$, que se halla a la misma altura que I . Sería virtual el punto V' en que la arista I corta a la vertiente $\overline{B-G}$; pero nos sirve como comprobación, ya que los puntos $\overline{V'-e-F}$ se han de hallar en línea recta, así como los $\overline{C-d-V'}$.

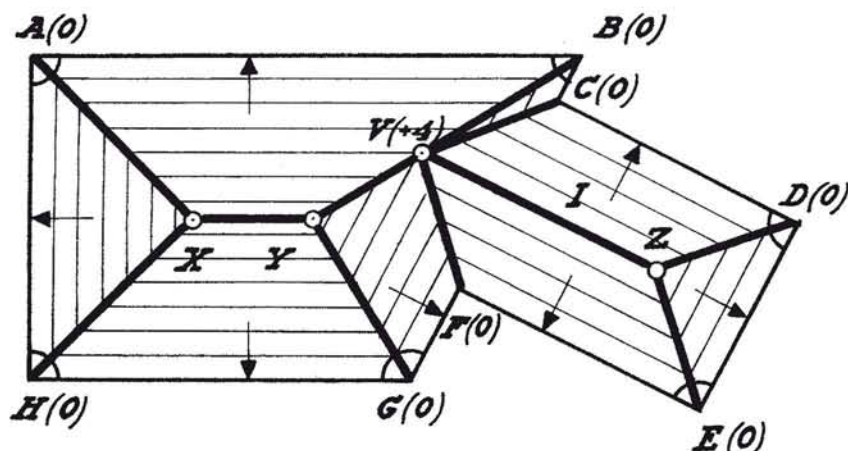


Fig. 218. — Se determina las pendientes de las vertientes del cuerpo anexo CDEF, con la condición de que V sea un punto de la arista $\overline{B-Y}$.

Figura 218. En este sistema de representación se pueden resolver problemas de esta naturaleza muy variados, entre ellos el que aparece en la figura de referencia, donde, partiendo del espacio a cubrir, idéntico al representado en las figuras 215, 216 y 217, se determina la pendiente que han de tener las vertientes correspondientes a los lados $\overline{C-D}$, $\overline{D-E}$ y $\overline{E-F}$, iguales entre sí, pero con la condición de que la arista I corte a la $\overline{B-Y}$: conocida, como anteriormente, la posición de la recta I , así como la de las $\overline{Z-D}$ y (por $\overline{Z-E}$ ser iguales las pendientes de las tres caras), se determina el punto V como encuentro de la recta I con la ya citada $\overline{B-Y}$.

En este caso, y por corresponder el punto V al de intersección de la horizontal de altura $+4$ (horizontales de las vertientes $\overline{A-B}$

y $\overline{B-G}$ de la misma altura), vemos que sabiendo las cotas de los puntos de arranque, $C(O)$ y $D(O)$, se consigue la línea de máxima pendiente de las vertientes en cuestión.

Figura 219. El espacio a cubrir está constituido por un polígono exterior $A-B-C-D-E$ de cota cero, y un rectángulo interior, $F-G-H-K$, también de cota cero.

Este caso corresponde al espacio a cubrir de un edificio de

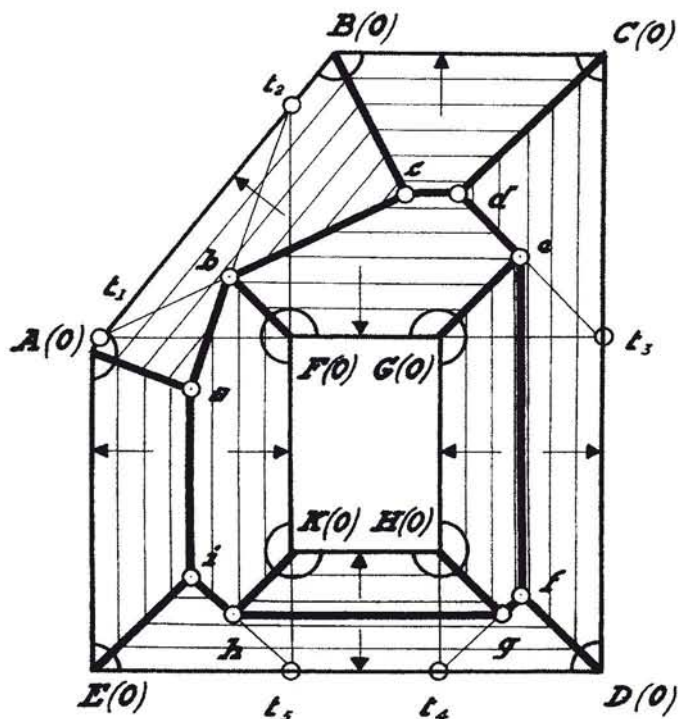


Fig. 219. — Espacio irregular con patio interior a cubrir con vertientes de igual pendiente.

planta irregular con un patio interior. Las pendientes de las vertientes son idénticas en todas sus caras, y aplicando los conocimientos adquiridos por los casos anteriores, logramos el polígono de separación de vertientes $a-b-c-d-e-f-g-h-i$, donde desempeñan un papel esencial las trazas $t_1-t_2-t_3-t_4-t_5$, que nos permitirán hallar la intersección de los planos de las distintas vertientes cuando no queden directamente determinados, por simetría, como lo son los $\overline{B-c}$, $\overline{C-d}$, $\overline{G-e}$, $\overline{D-f}$, etc.

Casos particulares de intersección de planos en el sistema diédrico. Intersección de dos planos proyectantes. (Fig. 220.)

Nos hallamos en presencia de la determinación de la recta común de dos planos, el uno proyectante horizontal $P-P'$, y el otro proyectante vertical $R-R'$.

Es indudable que utilizando los planos de proyección como planos auxiliares, obtenemos dos puntos de la intersección buscada, que son sus trazas $h-h'$ y $v-v'$, pudiendo por tanto anotar la intersección: $i-i'$.

Como se observa, las proyecciones de esta intersección se confunden con las trazas de los planos; es decir, i con P e i' con R' , lo cual concuerda con las características de los planos en cuestión, que al ser pro-

yectantes tienen la propiedad de que *todo elemento que contengan se proyecta según su traza*. (Véanse las figuras 120, 121, 122 y 123.)

Intersección de un plano cualquiera $P-P'$, con otro paralelo a la línea de tierra $R-R'$. (Fig. 221.) Seguiremos el mismo artificio de hallar

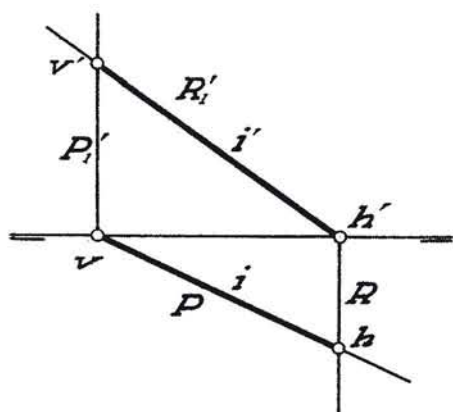


Fig. 220. — Intersección de dos planos proyectantes.

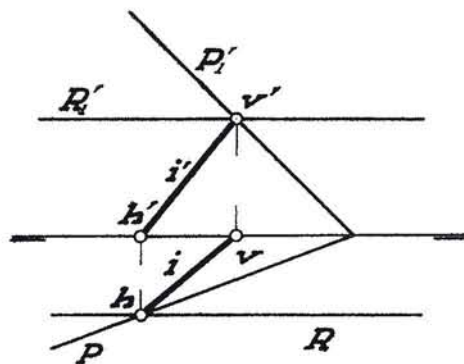


Fig. 221. — Intersección de un plano paralelo a la línea de tierra con otro cualquiera.

las trazas de esta recta de intersección: $h-h'$ y $v-v'$, que nos la determinan: $i-i'$.

Las trazas homónimas de los dos planos se cortan fuera de los límites del dibujo. Primer caso. (Fig. 222.) Tratamos en ésta de hallar la intersección de dos planos $P-P'$, y $R-R'$, situados de tal manera que sus trazas verticales se corten fuera de los límites del dibujo.

Tomemos como primer plano auxiliar el horizontal de proyección que nos proporciona el punto traza horizontal de la intersección: $h-h'$, y luego, como segundo plano auxiliar cualquiera otro horizontal: H'_1 , el cual nos producirá las horizontales $s-s'$ y $s_1-s'_1$ (determinadas, como ya sabemos, por sus trazas verticales $v-v'$ y $v_1-v'_1$, respectivamente). Estas dos horizontales nos proporcionarán el punto común a ellas: $a-a'$, que también lo será de los dos planos en cuestión; es decir, será otro punto de la intersección buscada $i-i'$.

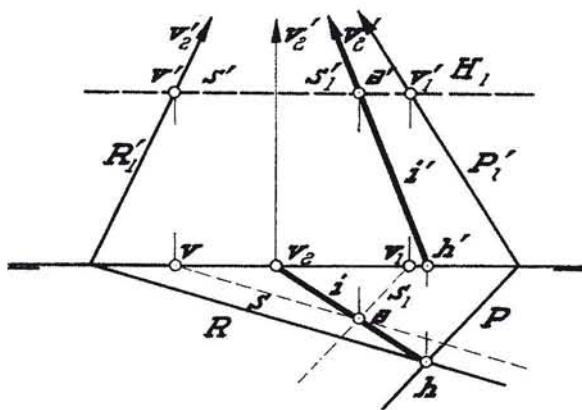


Fig. 222. — Intersección de dos planos cualesquiera, siendo estéril el plano vertical de proyección.

Como comprobación, la recta de referencia, correspondiente a v_2 , proyección horizontal de la traza vertical de la intersección, habrá de converger en el mismo punto v'_2 , perteneciente a la vez a i' , a R'_1 y a P'_1 .

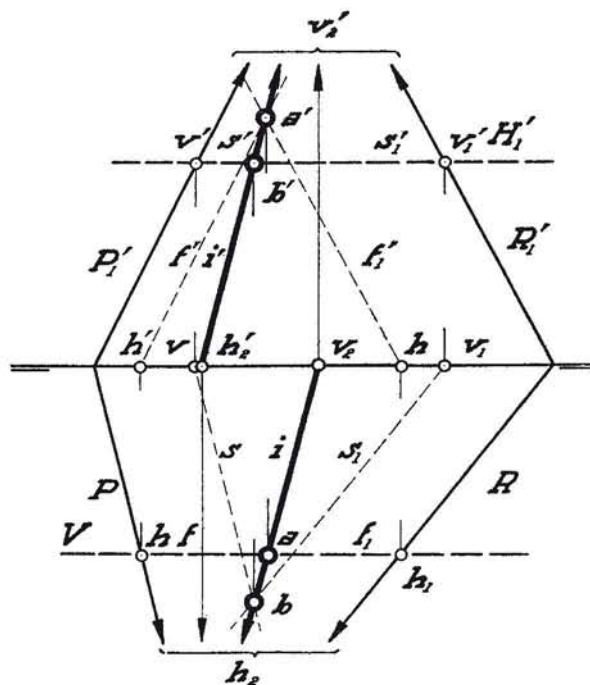


Fig. 223. — Las distintas trazas se cortan fuera de los límites del dibujo.

a los dos planos: $b-b'$, quedando por éste y por el $a-a'$, determinadas las dos proyecciones de la intersección: $i-i'$.

Como comprobación, la recta de referencia de h'_2 será concurrente en h_2 con $P-i-R$; y de la misma forma, la recta de referencia de v_2 convergerá en v'_2 con $R'_1-i'-P'_1$.

Figura 224. Existe otro procedimiento sencillo para conseguir resolver este problema, a veces, con alguna simplificación. Los planos dados son, como en el caso anterior: $P-P'_1$ y $R-R'_1$.

Aunque no hemos estudiado el paralelismo entre planos, podemos adelantar sin perjuicio alguno, el que rectas y planos paralelos se pro-

Segundo caso (Fig. 223):

En este caso, las trazas $P-P'_1$ y $R-R'_1$ de los planos se cortan dos a dos fuera de los límites del dibujo; entonces utilizaremos como primer plano auxiliar el paralelo al vertical: V , que nos determinará las frontales $f-f'$ y $f_1-f'_1$ (determinadas por sus trazas $h-h'$ y $h_1-h'_1$, según ya sabemos), que dan lugar al punto común $a-a'$.

Como segundo plano auxiliar emplearemos uno horizontal cualquiera H'_1 , que nos determinará las horizontales $s-s'$ y $s_1-s'_1$ (partiendo asimismo de los puntos $v-v'$ y $v_1-v'_1$). Estas dos horizontales se cortan en el punto común

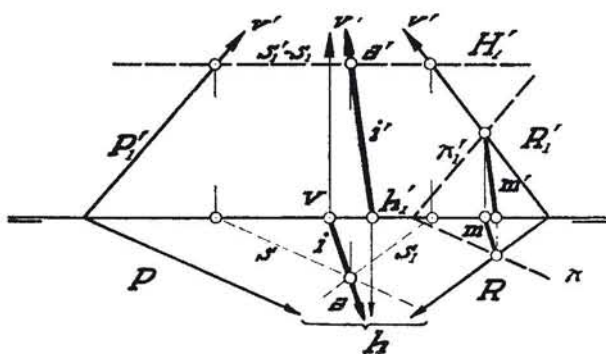


Fig. 224.—El mismo caso de la figura anterior resuelto con un plano paralelo a uno de los dados.

yectan en este sistema con sus correspondientes elementos paralelos también, por lo que trazaremos el plano $\pi-\pi'$, paralelo a $P-P'$, que corte al plano $R-R'$ en condiciones normales, dándonos lugar a una intersección $m-m'$ a la que habrá de ser necesariamente paralela la $i-i'$ que buscamos; es decir, que hemos conseguido el punto impropio de la recta $i-i'$.

Necesitando otro punto de la intersección buscada, utilizaremos ahora como plano auxiliar el H' , como en los casos anteriores, y obtendremos $a-a'$; bastará trazar las proyecciones $i-i'$ homónimas y paralelas a $m-m'$, respectivamente.

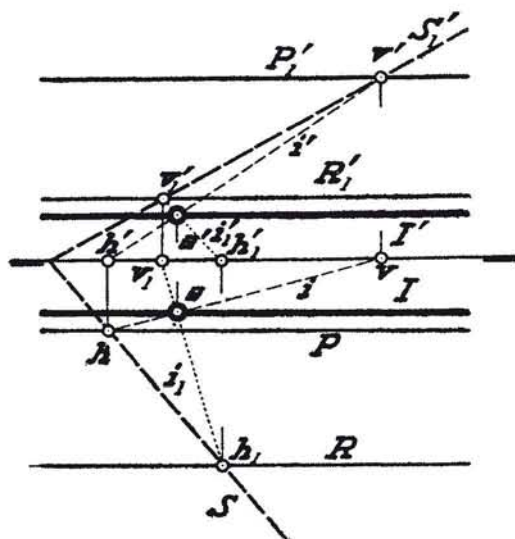


Fig. 225. — Intersección de dos planos paralelos a la línea de tierra.

Intersección de dos planos paralelos a la línea de tierra. (Fig. 225.)
Los planos son $P-P'$, y $R-R'$.

De antemano sabemos que al ser paralelos a la línea de tierra estos dos planos, su intersección también habrá de ser paralela a la misma, con lo que tenemos ya el punto impropio de la intersección deseada. Bastará el conocimiento de otro punto para de esta forma poderla proyectar.

Para ello elegiremos el plano auxiliar cualquiera $S-S'$, el cual nos dará las intersecciones $i-i'$ e $i_1-i'_1$ con cada uno de los planos dados, intersecciones que se obtienen repitiendo el problema ya resuelto en la figura 221. Así logramos el punto común $a-a'$, perteneciente a $P-P'$, y a $R-R'$, por el cual trazaremos $I-I'$.

Intersección de un plano cualquiera $R-R'$ con otro perpendicular al segundo plano bisector $P-P'$. (Fig. 226.)

Utilizando como planos auxiliares los de proyección, resolveremos con toda facilidad la determinación de las proyecciones $i-i'$ de la intersección, tal y como si se tratara de dos planos cualesquiera.

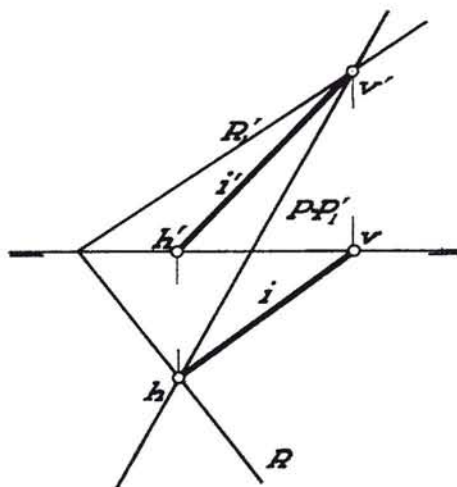


Fig. 226.— Intersección de un plano perpendicular al 2.º bisector con otro cualquiera.

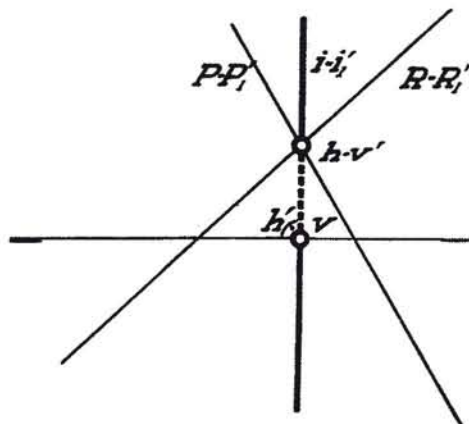


Fig. 227.— Intersección de dos planos perpendiculares al segundo bisector.

Intersección de dos planos $P-P'$ y $R-R'$, perpendiculares al segundo plano bisector. (Fig. 227.)

Al utilizar el plano horizontal de proyección, como plano auxiliar, obtenemos el punto $h-h'$, y empleando el vertical, el $v-v'$, resultando así determinadas las proyecciones de la recta de intersección $i-i'$, recta de perfil que podemos manejar, pues conocemos dos de sus puntos. (Véanse las figuras 102 y 103.)

(Véanse las figuras 102 y 103.)

Intersección de dos planos $P-P'$, $R-R'$, de trazas paralelas. (En este caso, $P-R$.) (Fig. 228.)

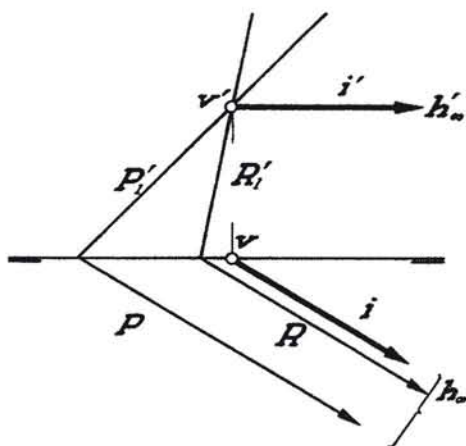


Fig. 228.— Intersección de dos planos en que dos de sus trazas homónimas son paralelas.

Utilizando el plano vertical como plano auxiliar, conseguimos el punto $v-v'$, y el plano horizontal nos da como punto común el $h_{\infty}-h'_{\infty}$, lo que se traduce en que la recta intersección $i-i'$ de estos dos planos es la horizontal común a ambos.

Figura 229. Cuando se haya de manejar un plano (P) que pase por la línea de tierra, determinado por ésta y un punto A (véase fig. 128), será útil emplear un *horizontal* como plano auxiliar, en este caso el H_1 , que pase por el punto A , pues entonces el plano (P) cortará al auxiliar H_1 según una horizontal S paralela a la línea de tierra, cuyas pro-

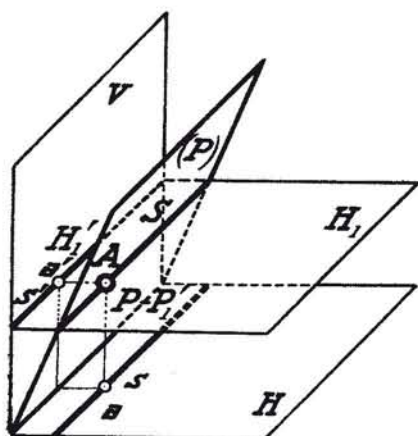


Fig. 229. — Intersección de un plano que pasa por la línea de tierra con un horizontal.

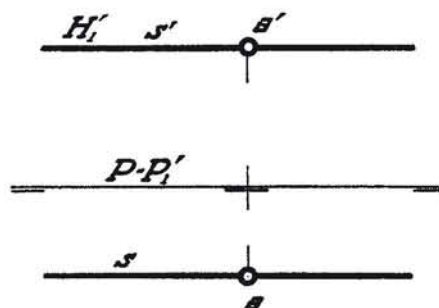


Fig. 230. — Cuando interviene un plano definido por la línea de tierra y un punto, se utiliza con ventaja como plano auxiliar el horizontal o el vertical que pasan por dicho punto.

yecciones $s-s'$ pasan respectivamente por $a-a'$, proyecciones del punto dado A .

En la figura 230, el plano en cuestión $P-P_1$, determinado por el punto $a-a'$, seccionado por el plano auxiliar H_1 , nos da la horizontal $s-s'$.

Este artificio nos será muy cómodo cuando, como en el caso de la figura 231, se tenga que hallar, por ejemplo, la recta de intersección del plano $P-P_1$, definido por la línea de tierra y por el punto $a-a'$, con otro plano cualquiera $R-R_1$.

En efecto:

Por de pronto, tenemos ya un punto de la intersección, que es doble: $b-b'$, común a las trazas $R-P$ y P_1-R_1 , situado en la línea de tierra. Necesitamos otro

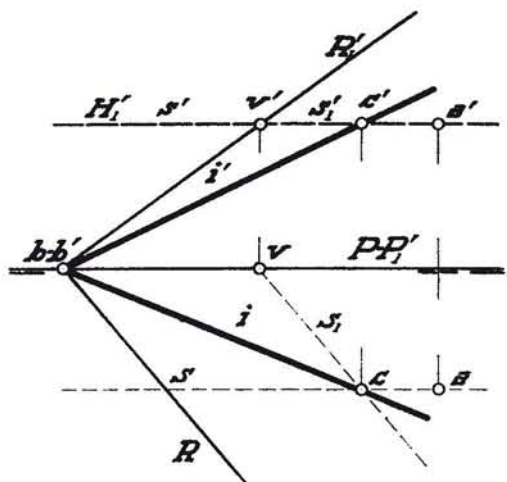


Fig. 231. — Intersección de un plano determinado por la línea de tierra y un punto con el primer bisector.

punto de la intersección, y éste lo logramos utilizando como plano auxiliar el horizontal H , cuya traza vertical H' , pasa por la proyección vertical a' del punto A , determinativo del plano $P—P'$.

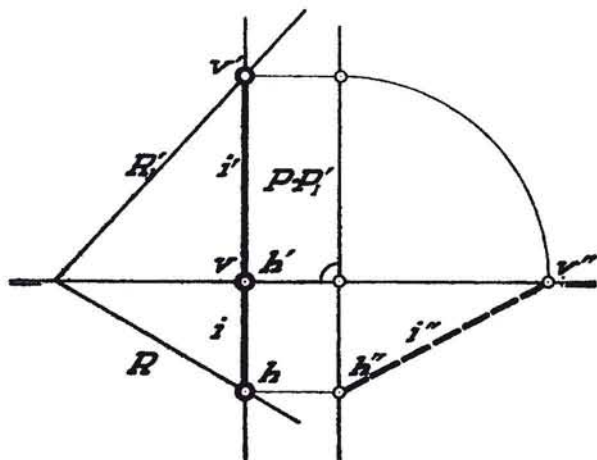


Fig. 232. — Intersección de un plano cualquiera con otro de perfil.

Este plano horizontal cortará al mencionado $P—P'$, según la horizontal $s—s'$, como acabamos de ver en las dos figuras anteriores, y a su vez con el plano $R—R'$, nos da la horizontal $s_1—s'_1$.

Las dos horizontales $s—s'$ y $s_1—s'_1$ se cortarán en un punto $c—c'$, el cual, en unión del ya conocido $b—b'$, nos determinará la intersección pedida: $i—i'$.

Intersección de un plano cualquiera $R—R'$ con otro de perfil $P—P'$. (Fig. 232.)

Utilizaremos los planos de proyección como auxiliares, los cuales determinarán los puntos traza $h—h'$ y $v—v'$, que darán lugar a la intersección $i—i'$; por ser de perfil, tiene como proyección vertical segunda: i'' . (Fig. 103.)

Figura 233. Los planos dados en este caso son:

El $P—P'$, de posición normal, y el $R—R'$, cuyas trazas aparecen invertidas.

Aplicaremos el procedimiento general ya conocido; utilizando el plano horizontal de proyección veremos que las trazas homónimas $P—R$ nos producen el punto $h—h'$ de la intersección, y las trazas verticales $P'_1—R'_1$ nos dan otro punto $v—v'$, quedando así definida la intersección $i—i'$.

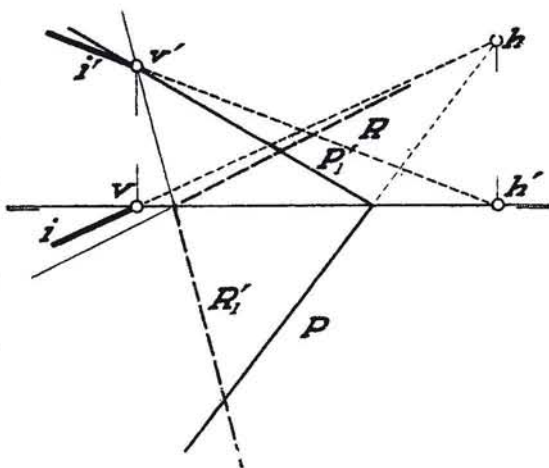


Fig. 233. — Intersección de los planos: $P—P'$ y $R—R'$.

Observación. Al analizar los datos vemos que no se trata de ningún caso particular ni notable, pues las trazas prolongadas más allá de la línea de tierra (son indefinidas siempre) nos sitúan dentro del caso general tratado.

Intersección de dos planos $P-P'$, $R-R'$, cuyas trazas se cortan en el mismo punto de la línea de tierra $1-1'$. (Fig. 234.)

Como es lógico, este punto $1-1'$ pertenecerá a la intersección que tratamos de buscar.

Para conseguir otro punto de la misma emplearemos como plano auxiliar el horizontal H'_1 , por ejemplo, que nos proporcionará las

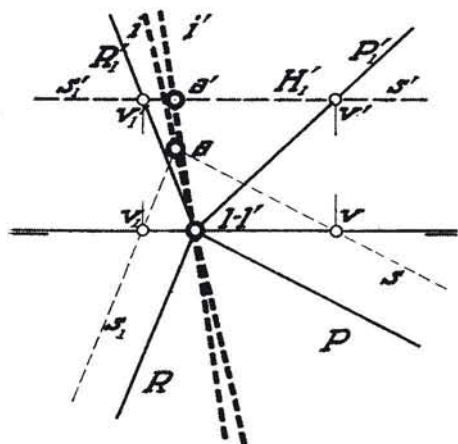


Fig. 234. — Intersección de dos planos que pasan por el mismo punto de la línea de tierra.

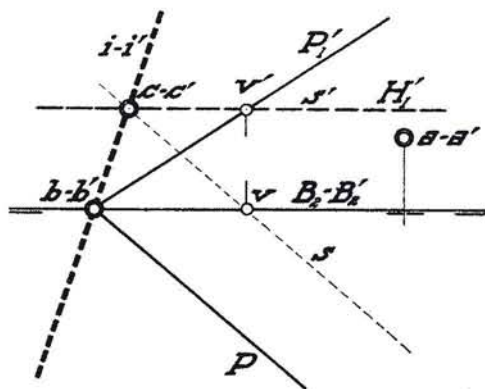


Fig. 235. — Intersección de un plano cualquiera con el segundo bisector.

horizontales $s-s'$ y $s_1-s'_1$, que tienen común el punto $a-a'$ de la intersección $i-i'$, la cual, como aparece en la figura, será totalmente oculta.

Intersección de un plano cualquiera $P-P'$, con el segundo plano bisector. (Fig. 235.)

Nos hallamos ante un caso parecido al representado en la figura 231, con la particularidad de que el punto que determina el plano bisector es el doble $a-a'$.

Como sabemos de antemano que la intersección que buscamos, por ser una recta de dicho plano bisector, es doble, simplificaremos la construcción de la figura 231 ya referida, al utilizar como plano auxiliar el H'_1 , sin que haya de pasar por el punto $a-a'$, pues bastará trazar una horizontal cualquiera del plano $P-P'$: $s-s'$, para conseguir su punto doble $c-c'$, que pertenecerá a la intersección $i-i'$, definida además por el punto $b-b'$.

Intersección de un plano paralelo a la línea de tierra con el primer plano bisector. (Fig. 236.)

Podemos resolver este problema siguiendo el camino indicado en la figura 231; pero nos será más breve el emplear, en este caso, la propie-

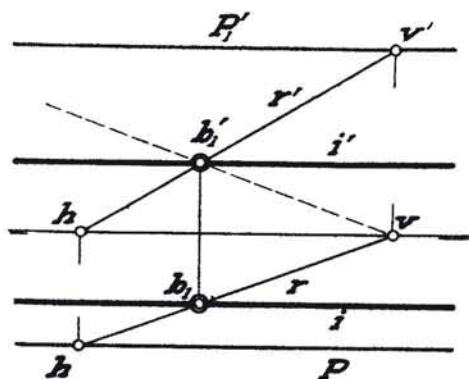


Fig. 236. — Intersección de un plano paralelo a la línea de tierra con el primer bisector.

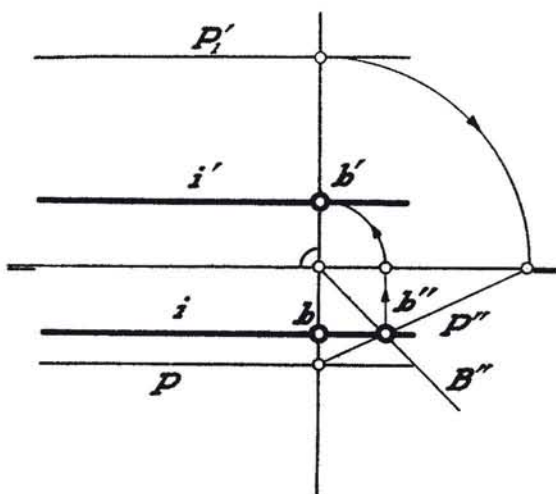


Fig. 237. — Intersección de dos planos paralelos a la línea de tierra.

dad de que goza el punto de este bisector, y es que equidistan sus proyecciones de la línea de tierra.

Para ello, y sabiendo que la intersección $i-i'$ de estos dos planos ha de ser paralela a la línea de tierra, por serlo ellos también, quedará definida con el conocimiento de un solo punto, y éste será el del primer bisector: $b_1-b'_1$, de una recta cualquiera $r-r'$, elegido sobre el plano $P-P'_1$.

Figura 237. También podíamos haber resuelto este mismo problema auxiliándonos de la proyección vertical segunda, donde aparecen las trazas P'' y B'' del plano dado y del primer bisector, respectivamente, que nos proporcionan el punto b'' , que referido al sistema primitivo nos da el $b-b'$, por donde han de pasar las proyecciones de la intersección $i-i'$.

Casos particulares de intersección de planos en el sistema axonométrico.

Intersección de un plano cualquiera $p'-p''-p'''$, con otro $q'-q''-q'''$ paralelo a la cara $X-O-Z$. (Fig. 238.)

Utilizando las caras $X-O-Y$ y $Z-O-Y$ como planos auxiliares, conseguimos los puntos $a'-a''-a'''$ y $b'''-b''-b'$, que nos determinan a su vez las proyecciones directas I y laterales $i'-i''-i'''$ de la intersección buscada.

Como observación se hace constar que el plano dado q' y q''' es proyectante, y por ello i' e i''' se confunden con q' y q''' , resultando ser la recta de intersección I una frontal del plano P .

Intersección de un plano cualquiera con otro que pasa por un eje.
(Fig. 239.)

Sean los planos: $p'-p''-p'''$ y $q'-q''-q'''$, ($q'-q''' = \overline{O-Y}$).

La intersección tendrá, desde luego, como punto que le pertenece, el $a'-a''-a'''$ en que se cortan las trazas $p'-p'''$ con el eje $\overline{O-Y}$ ($q'-q'''$).

Además, el punto B también pertenece a la intersección, por lo que queda definida mediante los puntos ya mencionados $\overline{A-B}$.

Es de observar en este caso que el plano Q es proyectante con respecto de la cara $\overline{X-O-Z}$, por lo que i'' coincide con q'' .

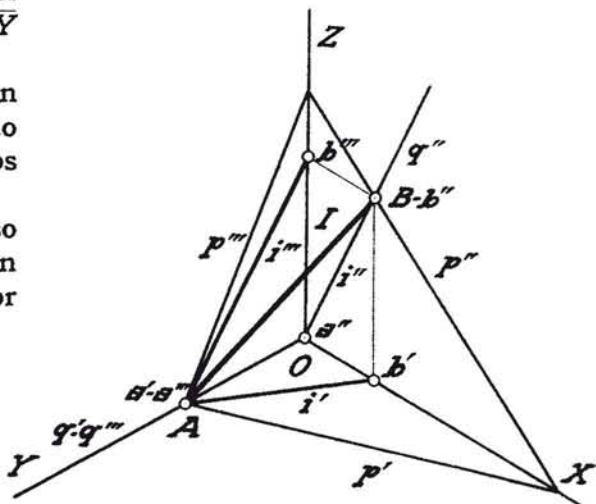


Fig. 239.—Intersección de un plano cualquiera con otro que pasa por un eje.

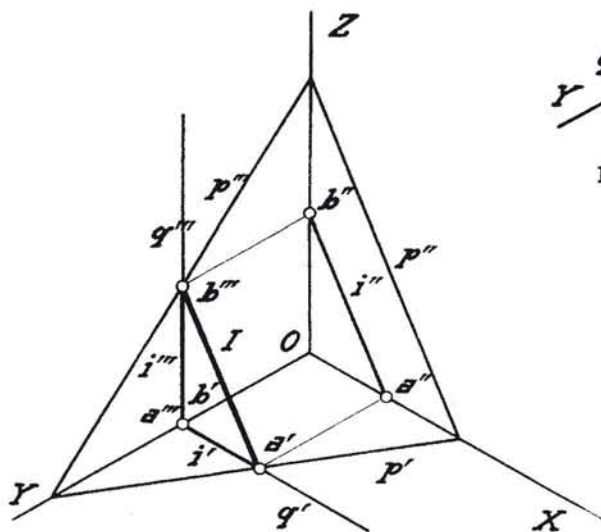


Fig. 238.—Intersección de un plano cualquiera con otro paralelo a una cara del triedro.

Intersección de un plano cualquiera con otro que pase por el origen. (Fig. 240.)

Los planos son: $p'-p''-p'''$ y $q'-q''-q'''$.

Nos son suficientes los puntos $A-B$ de la intersección que se obtienen al utilizar las caras $\overline{Z-O-Y}$ y $\overline{X-O-Z}$, no siéndonos necesaria la intersección q' del plano Q con la cara $\overline{X-O-Y}$.

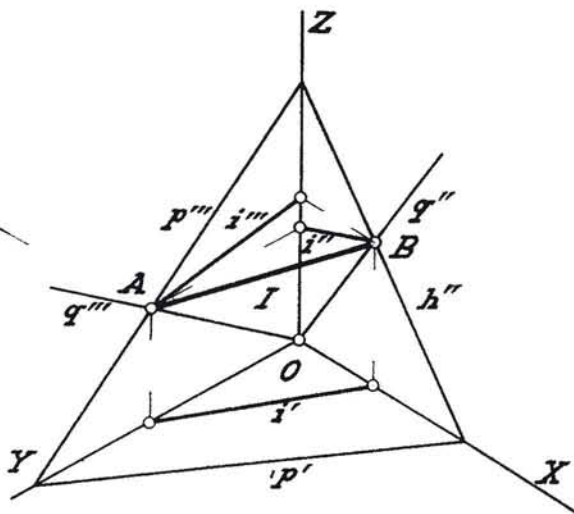


Fig. 240.—Intersección de un plano cualquiera con otro que pasa por el origen.

Figura 241. En la figura de referencia se halla la intersección de los planos $p'-p''-p'''$ y $q'-q''-q'''$, no diferenciándose en nada este caso del general, pues existen

normalmente dos caras que se pueden utilizar como planos auxiliares. La disposición de las trazas de estos planos es algo especial; pero no se puede considerar como caso particular, debiéndose proceder en la forma ordinaria conocida.

Intersección de dos planos paralelos al eje $O-Z$. (Figura 242.)

Los planos son: $p'-p''-p'''$ y $q'-q''-q'''$; dan lugar a una recta común I de punta con respecto a la cara $X-O-Y$, paralela, por tanto, al eje $O-Z$.

Determinación de la traza ordinaria de un plano cualquiera.

Sabemos, según la página III, que la traza ordinaria de un plano está situada en el plano de representación π , y que es extraordinariamente útil para manejar el plano en este sistema de representación. Por ello haré la siguiente observación:

El plano π de proyección, según queda especificado en el capítulo II al describir el fundamento del sistema axonométrico isométrico, forma ángulos iguales con las tres aristas del triedro trirectángulo. Mientras no se especifique lo contrario, se elige su posición de tal manera que contenga el vértice O del triedro.

Figura 243. Esto nos quiere decir que cualquier plano paralelo a π determinará sobre cada una de las tres aristas de dicho triedro segmentos iguales, dando lugar a

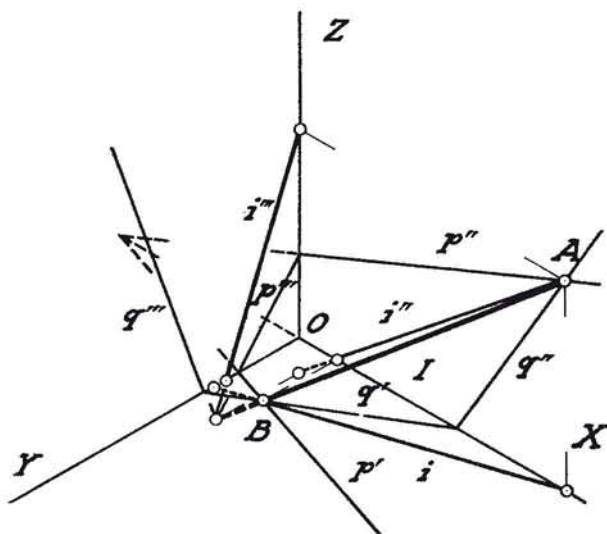


Fig. 241. — Intersección de dos planos cualesquiera.

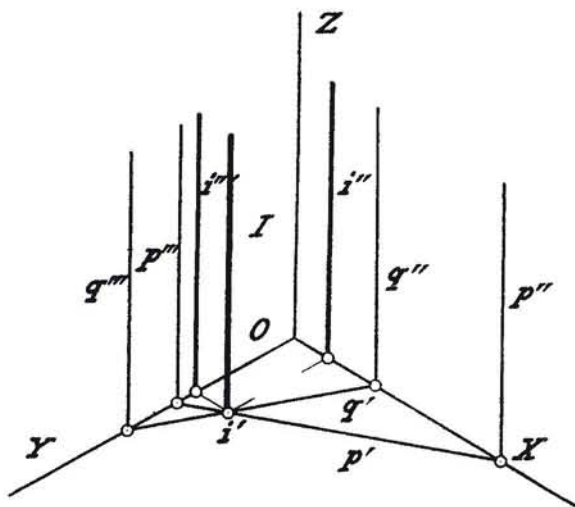


Fig. 242. — Intersección de dos planos paralelos a un eje.

que en el plano del dibujo las trazas de dicho plano paralelo a π con las caras del triedro fundamental se proyecten según los lados de un triángulo equilátero: tal es el caso del plano $p'-p''-p'''$.

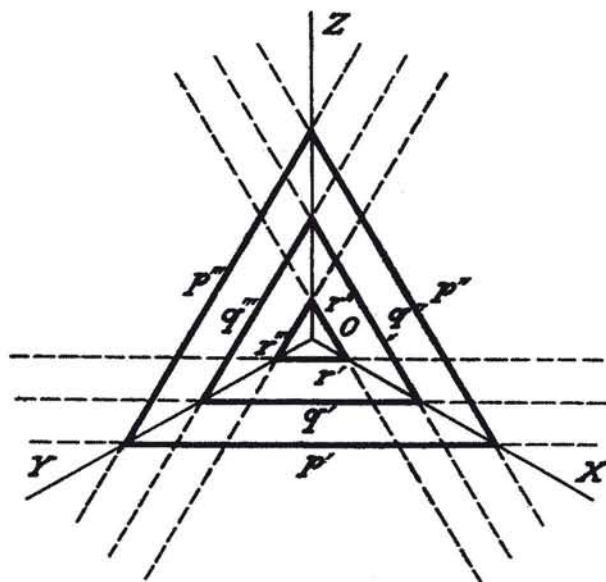


Fig. 243.—Taza de un plano paralelo al de referencia π .

Pero siendo el plano infinito en extensión, también lo serán sus trazas, por lo que la p' , por ejemplo, será la recta indefinida que se representa, de la cual una parte, la de trazo lleno, será únicamente vista por hallarse en el primer cuadrante. Sucede exactamente lo mismo con las otras dos trazas: $p''-p'''$.

Si a partir de la posición del plano P vamos acercando el plano paralelo a π hacia el origen O , obtendremos posiciones ta-

les como las de los planos Q y R , que darán lugar sobre las mismas caras del triedro a trazas paralelas, también infinitas en extensión, pero cuya parte vista va disminuyendo hasta lograr ocupar el plano π la posición real en el origen O , por lo que sus trazas $\pi'-\pi''-\pi'''$ serán todas ellas ocultas y pasarán por el origen O . (Fig. 244.)

Como resumen, tendremos que π' será la traza del plano π de representación con la cara $X-O-Y$, y $\pi''-\pi'''$ las producidas por las caras $X-O-Z$ y $Z-O-Y$, respectivamente.

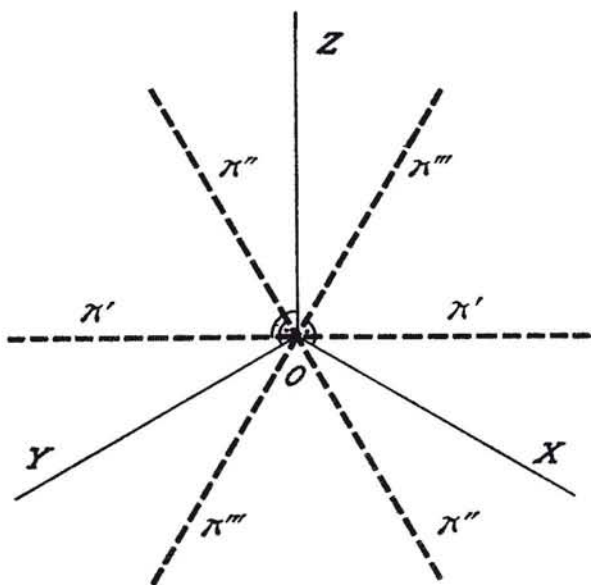


Fig. 244.—Sistema axonométrico: Taza de las caras del triedro con el plano de referencia π .

Figura 245. Para conseguir la traza ordinaria P del plano (P) , utilizaremos como planos auxiliares dos de las caras del triedro: Tomada la cara $(X)-O-(Y)$ tenemos, en el espacio, (a') como punto común a π' y a (p') , y en la proyección: a' común a π' y a p' . Se aprecia que (a') y a' son dobles, por estar en el plan π , quedando así definido un punto de la intersección.

De la misma manera operaremos con su otra cara.

Figura 246. Lo anteriormente expuesto nos va a permitir realizar la cons-

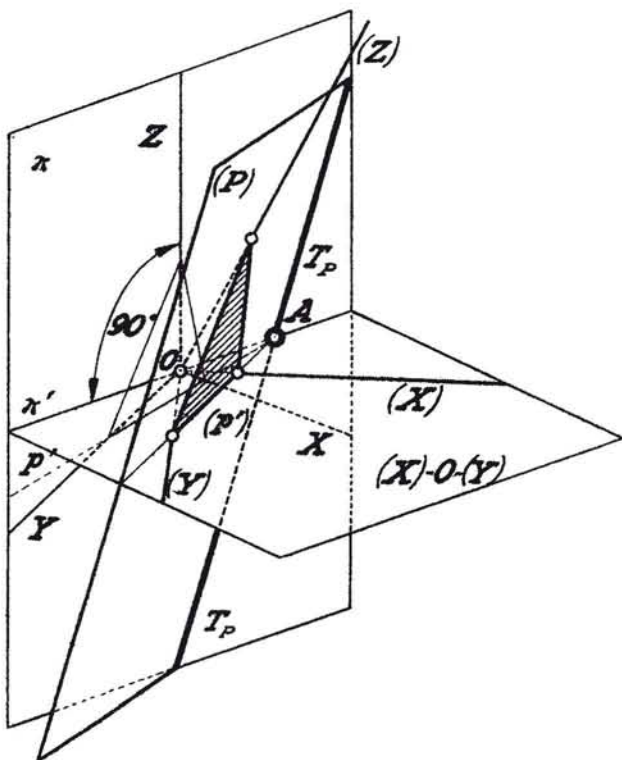


Fig. 245. — Sistema axonométrico: Taza de una cara del triedro con el plano de representación π .

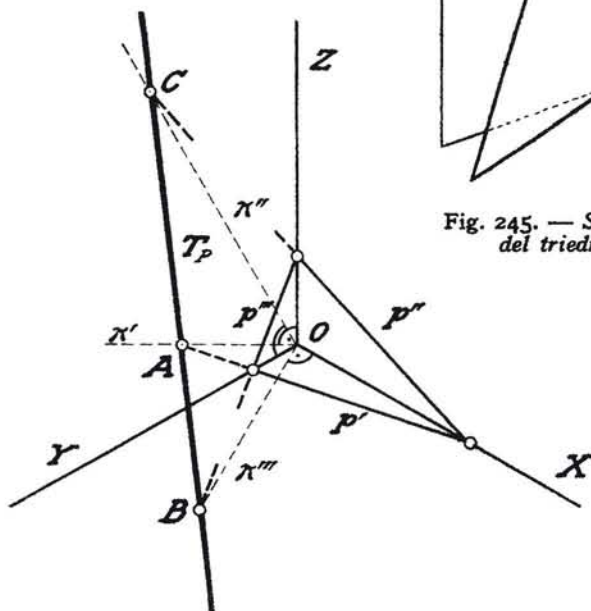


Fig. 246. — Sistema axonométrico: Determinación de la traza ordinaria de un plano cualquiera.

quedando así definida por estos dos puntos A y B la traza T_p .

Como comprobación, p'' y π'' nos darán el punto C , perteneciente a dicha traza ordinaria T_p .

trucción en el plano del dibujo.

Utilicemos como plano auxiliar la cara $X-O-Y$, que determina el punto A , común a p' y π' .

Elijamos ahora como plano auxiliar la cara $Z-O-Y$, y así conseguiremos el punto B , común a p''' y a π''' ,

El plano está dado por sus trazas $p''-p'''$.

La intersección I de estos dos planos, determinada por los puntos A y B nos dará el punto impropio de la traza T_p pedida, la cual, como sabemos, ha de pasar por el origen O , por definición.

Esta intersección $I-i$ no ofrece particularidad notable alguna, y se determinará mediante los puntos T_{\pm} y F , según sabemos. (Fig. 204.)

© Editorial Tébar. Prohibida la reproducción sin la autorización expresa de la editorial

Intersección de un plano cualquiera P con otro R que pasa por la línea de tierra. (Fig. 249.)

En este caso, el punto T_π de la intersección es el común a la línea

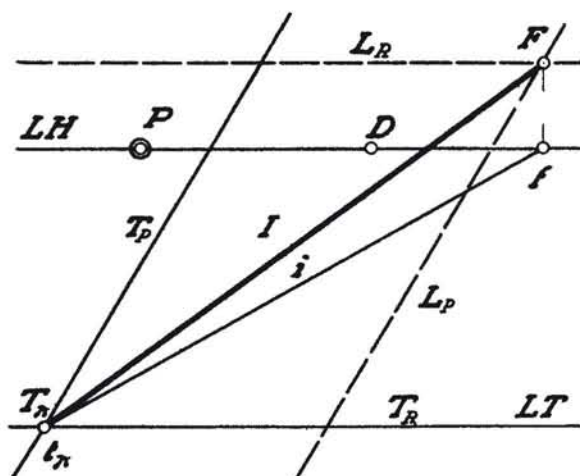


Fig. 249. — Sistema cónico: Intersección de un plano que pasa por la línea de tierra con otro cualquiera.

de tierra y a T_P , quedando la recta de intersección $I-i$ definida por dicho punto y por el de fuga $F-f$.

Intersección de dos planos P y R cuando sus trazas T_P-T_R se cortan fuera de los límites del dibujo. (Fig. 250.)

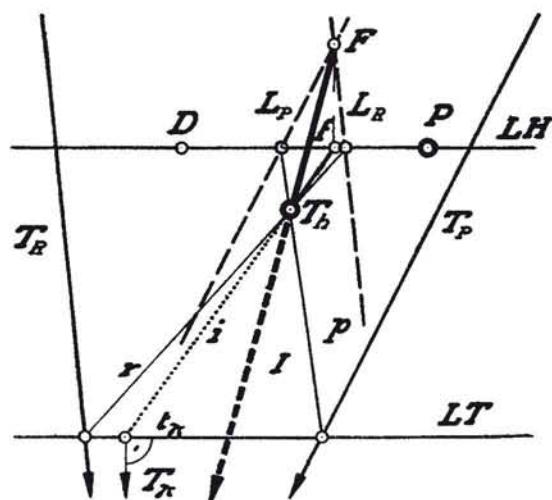


Fig. 250. — Sistema cónico: El plano del cuadro es estéril para hallar la intersección.

Bastará, como siempre, hallar dos puntos de la intersección; uno de ellos utilizando como plano auxiliar el plano impropio que nos determina su punto de fuga $F-f$, y otro el plano geométral que nos proporcionará el punto T_h , encuentro de las respectivas trazas horizontales $r-p$ de los planos dados.

Como comprobación, la recta de referencia de t_π convergerá en el mismo punto T_π , común a T_R-T_P e I .

Intersección de un plano P , paralelo a la línea de tierra con el geometral. (Fig. 251.)

Esta recta p que se trata de determinar está sujeta a dos condiciones:

1.^a Ser el lugar geométrico de las trazas todas las rectas del plano en cuestión con el plano geometral; y

2.^a Ser paralela a la línea de tierra, por serlo T_P .

Con ello tenemos indicado el camino para conseguir esta traza p . Se elegirá una recta cualquiera $R-r$ situada en el plano en cuestión, mediante dos puntos cualesquiera, T_P-t_P y $F-f$, situados sobre la traza T_P y sobre

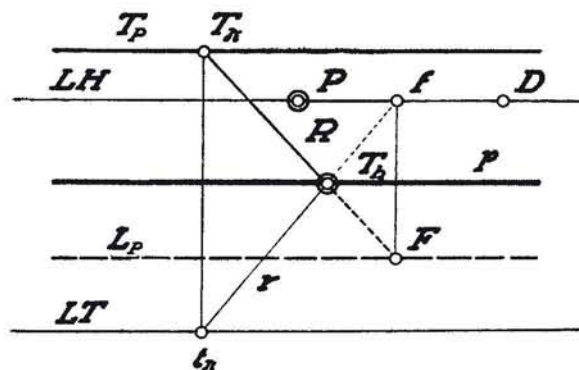


Fig. 251.—Sistema cónico: Intersección de un plano paralelo a la línea de tierra con el geometral.

la recta límite L_P , respectivamente, y se hallará su traza T_h con el geometral, por donde se habrá de trazar p , paralela a la línea de tierra.

Intersección de dos planos paralelos a la línea de tierra: $P-R$. (Fig. 252.)

Sabemos que la recta de intersección que buscamos, siendo paralela a la línea de tierra, ha de representarse mediante dos rectas $I-i$, también paralelas a la línea de tierra. Esto se traduce en que ya conocemos un punto de la intersección pedida: su punto impropio.

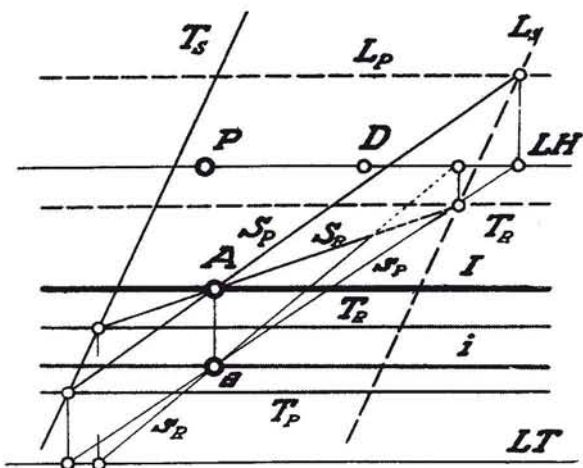


Fig. 252. — Sistema cónico: Intersección de dos planos paralelos a la línea de tierra.

Bastará para determinarla conseguir otro que le pertenezca, y esto se logra utilizando como plano auxiliar uno cualquiera, $S-(T_S-L_S)$, que nos producirá las rectas S_P-s_P y S_R-s_R en cada uno de los dos planos P y R , respectivamente, las cuales se cortan en el punto $A-a$ que tratábamos de lograr.

Intersección de dos planos P y R situados en tal forma que ni sus trazas $T_P—T_R$, ni sus rectas límites $L_P—L_R$ se corten dentro de los límites del dibujo. (Fig. 253.)

El artificio que en este caso utilizaremos es el de emplear como planos auxiliares: 1.º, el plano geometral que proporciona el punto T_h de la intersección; y 2.º, un plano cualquiera, en este caso paralelo a la línea de tierra $S—(T_S—L_S)$, el cual, y según hemos visto por casos

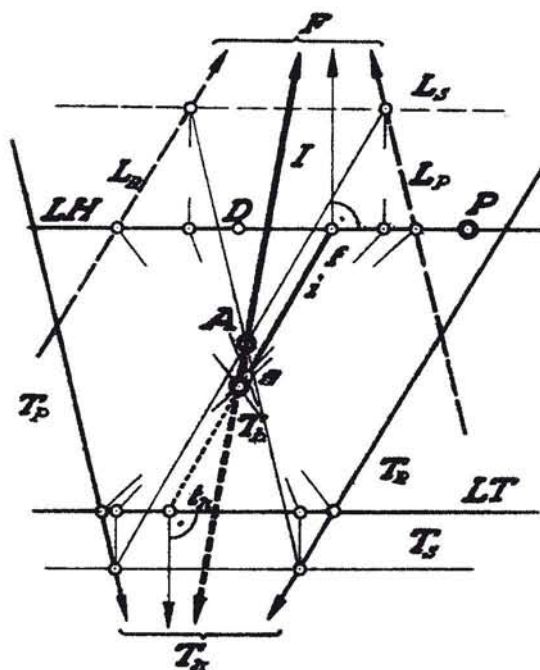


Fig. 253. — Sistema cónico: Intersección de dos planos cuando sus trazas y sus rectas límites se cortan fuera del dibujo.

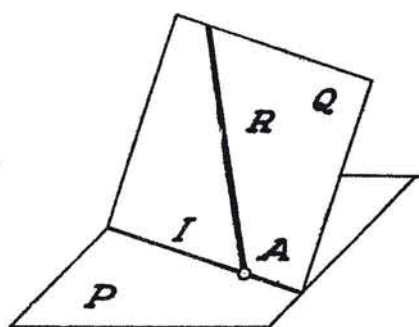


Fig. 254. — Intersección de una recta con un plano.

anteriores, nos da otro punto $A—a$ de la intersección deseada, que queda, por tanto, definida.

Como comprobación, f será proyección de F , punto de convergencia de las tres rectas $L_S—L_R—I$.

Igualmente apreciamos que la línea de referencia de t_π converge en el mismo punto con $T_P—I$ y T_R .

Intersección de una recta cualquiera con un plano. (Fig. 254.)

Sean el plano P y la recta R , cuyo punto común A tratamos de determinar.

El procedimiento consistirá en hallar la intersección I de un plano cualquiera Q que pase por R con el plano dado P , para luego ver el punto de encuentro de I y R , que será la finalidad del problema.

Resolución en el sistema acotado. (Fig. 255.)

Se trata de hallar el punto común al plano dado por su línea de máxima pendiente MP de cotas: (O) y ($+6$), y a la recta R , de cotas:

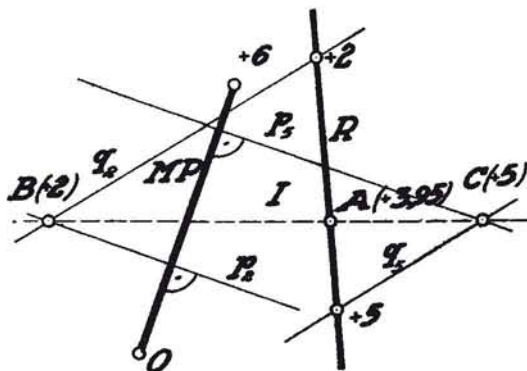


Fig. 255.—Sistema acotado: Intersección de recta y plano.

($+2$) y ($+5$). Haremos pasar por R un plano, integrado en este caso por dos horizontales cualesquiera: q_1 y q_2 , de dirección arbitraria. Las horizontales del plano dado: p_1 y p_2 , de misma altura, cortan a las anteriores en los puntos B ($+2$) y C ($+5$), respectivamente, que determinan la intersección I , la cual cortará a la recta R en cuestión en el punto A pedido, que resulta ser de cota ($+3,95$).

Sistema diédrico. (Fig. 256.)

El plano dado lo está por sus trazas $P-P'_1$, y la recta R por sus proyecciones $r-r'$. De todos los planos Q que pudiéramos elegir pasando por la recta R , uno de los que nos dan solución sencilla es el proyectante. Hemos elegido, en este caso, el proyectante vertical $Q-Q'_1$, que tendrá por intersección con el dado P la recta $i-i'$ determinada por los puntos $h-h'$ y $v-v'$ (i' confundida con Q'_1 y, por tanto, con r'). (Pág. 93, figs. 120 y 121.)

Por hallarse en el mismo plano $Q-Q'_1$, las rectas $r-r'$ e $i-i'$ nos dan el punto solución $a-a'$.

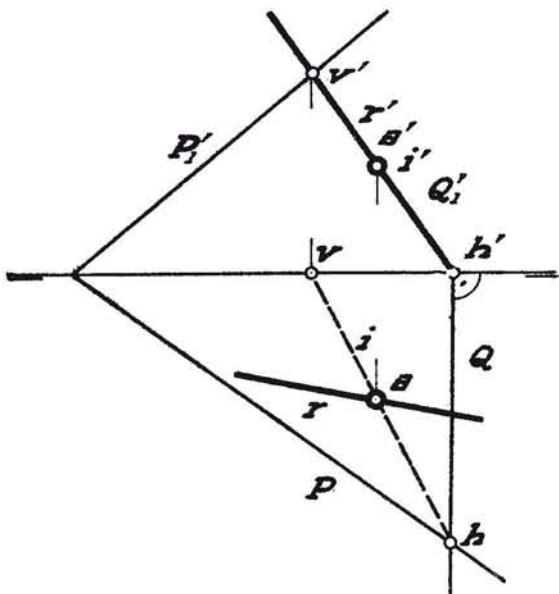


Fig. 256.—Sistema diédrico: Intersección de recta y plano.

Sistema axonométrico. (Fig. 257.)

El plano dado P tiene por trazas $p'—p''—p'''$, y la recta por proyecciones R y r' .

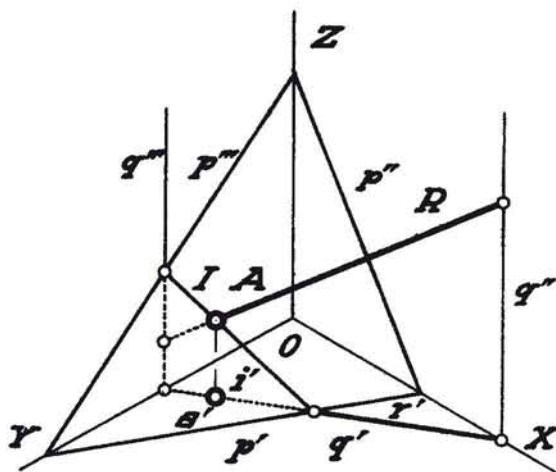


Fig. 257. — Sistema axonométrico: Intersección de recta y plano.

Elijamos como plano auxiliar Q el proyectante que nos origina r' , o sea: $q'—q''—q'''$, paralelo al eje $O—Z$.

Estos dos planos dan lugar a la intersección $I—i'$ (i' confundida con q' y r'), y las proyecciones directas $I—R$ dan el punto solución $A—a'$.

Sistema cónico. (Figura 258.)

El plano dado es el $T_P—L_P$, y la recta, $R—r$.

Elijamos como plano que contiene la recta $R—r$, su proyectante sobre el geometral $T_Q—L_Q$, cuya traza q se confunde con r .

Halleemos la intersección de estos dos planos $I—i$ utilizando los puntos T_P y T_h (i confundida con q y con r).

Las proyecciones directas $R—I$ nos proporcionan el punto pedido $A—a$.

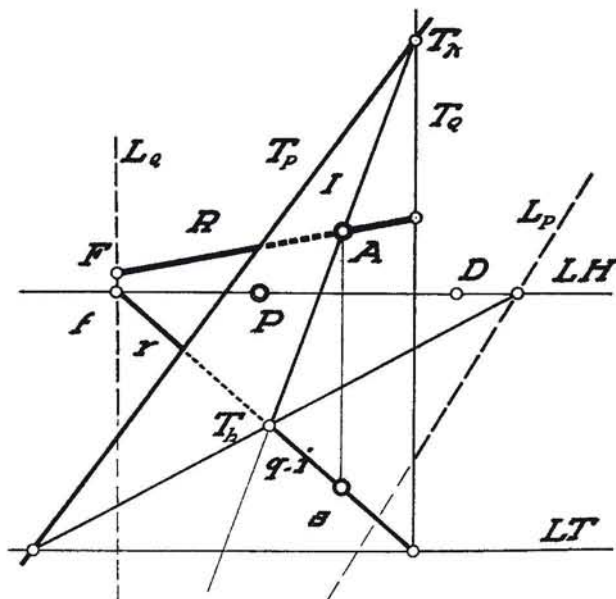


Fig. 258.—Sistema cónico: Intersección de recta y plano.

Figura 259. Será conveniente a veces saber hallar la intersección de una recta R con un plano P , definida por dos rectas.

En este caso, por las $M—N$, cuyo punto común es U .

La resolución de este problema consiste, como en el caso anterior,

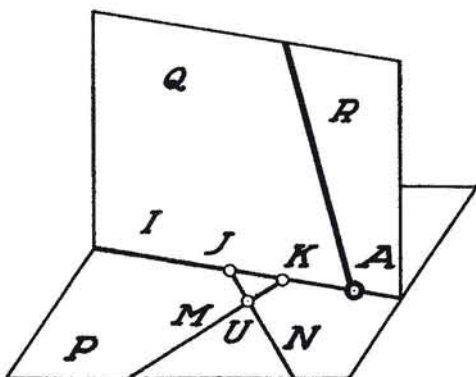


Fig. 259.—Intersección de una recta con un plano dado por dos rectas.

en hacer pasar por la recta R un plano cualquiera Q , el cual cortará a cada una de las rectas M y N en los puntos $J—K$, que determinarán la intersección I de los ya citados planos P y Q por lo que luego queda definido el punto pedido A .

Resolución de este problema en el sistema acotado. (Fig. 260.) Supongamos dado el plano por las dos rectas: M , de cotas $O (+4)$, y N , de cotas $(+1)$ y $(+5)$, que tienen común los puntos $M (+4)$, y la recta R , de cotas $O (+6)$.

Nos será más cómodo hallar la intersección I utilizando las horizontales p_0 y p_4 del plano $M—N$, y las q_0 y q_4 , de dirección cualquiera, situadas en el plano Q que contiene R . La recta I determina en R el punto solución: A .

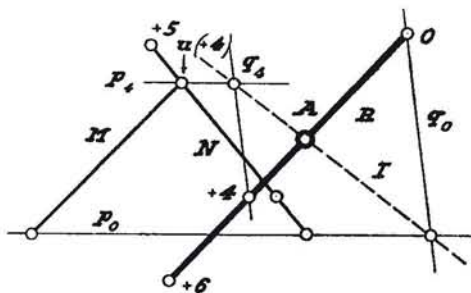


Fig. 260. — Sistema acotado: Intersección de una recta con un plano dado por dos rectas.

Nota: Dada la particularidad de este sistema, en realidad se ha resuelto el mismo caso de la figura 250.

Sistema diédrico. (Fig. 261.)

El plano está dado por $m-m'$ y $n-n'$, que se cortan en el punto $u-u'$, y la recta en cuestión es $r-r'$.

Elijamos como plano auxiliar que contenga a la recta R el proyectante horizontal $Q-Q'$, el cual nos determinará los puntos $k-j$; es decir, i (todos ellos confundidos con Q y r), que se referirán a sus respectivas proyecciones verticales en k' y j' , viendo que i' corta a r' en el punto a' , que con su referido a dan el punto buscado.

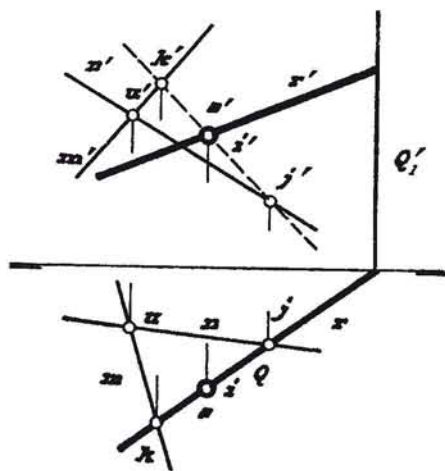


Fig. 261.—Sistema diédrico: Intersección de una recta con un plano dado por dos rectas.

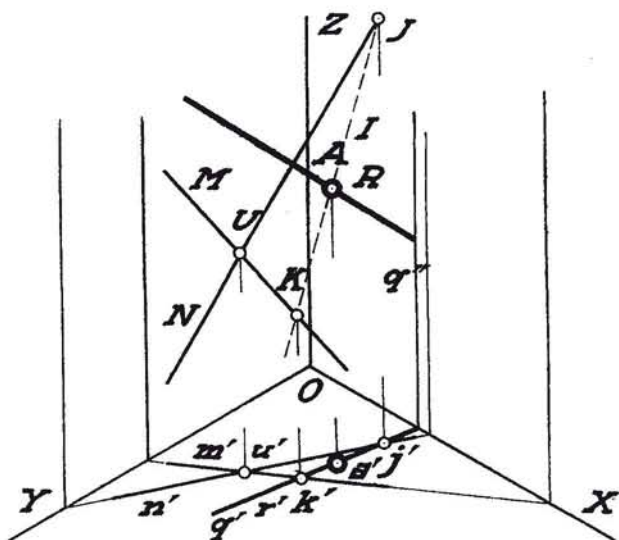


Fig. 262.—Sistema axonométrico: Intersección de una recta con un plano dado por dos rectas.

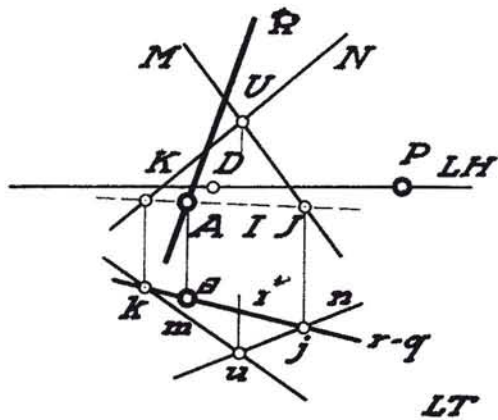
Sistema axonométrico. (Fig. 262.) Las rectas dadas son $M-m'$ y $N-n'$, que tienen común el punto $U-u'$, y la recta cuya intersección se trata de averiguar es $R-r'$.

Se elige como plano auxiliar el proyectante Q , que nos da los puntos $K-k'$ sobre la recta $M-m'$, y el punto $J-j'$ sobre la recta $N-n'$, con lo cual se obtiene la proyección directa I de la intersección. Esta y la R nos dan el punto deseado A , que se proyecta en a' .

Sistema cónico. (Fig. 263.)

El plano está determinado por: $M-m$ y $N-n$, cuyo punto común es $U-u$; la recta es $R-r$.

Emplearemos en este caso, con la recta R en cuestión sobre el geometral cuya traza horizontal es q , confundida con r , por lo que conseguimos inmediatamente los puntos j y k , que definen i , los cuales referidos a la proyección directa nos dan J y K , respectivamente, es decir, I , que cortará a la recta $R-r$ en el punto deseado $A-a$.



Recta que corta otras tres. (Figura 264.)

Este problema tiene siempre infinitas soluciones.

Las rectas $R-S-T$ han de estar situadas desde luego en posición tal que se crucen dos a dos, pues de lo contrario el problema no tendría objeto. La solución del mismo consistirá en:

Elegido, por ejemplo, un punto A de una de ellas, S , se determina la intersección I de los planos P y Q , constituídos por el punto elegido A y cada una de las rectas R y T , respectivamente, por lo que necesariamente la recta I cortará a las otras dos, R y T , en los puntos B y C .

También se puede hallar la recta I como unión del punto elegido A con el C , en que el plano Q , formado por $\overline{R-A}$, corta a la recta T .

Este problema tiene una gran aplicación cuando, como veremos en el tomo II, tratemos de las *superficies regladas alabeadas*.

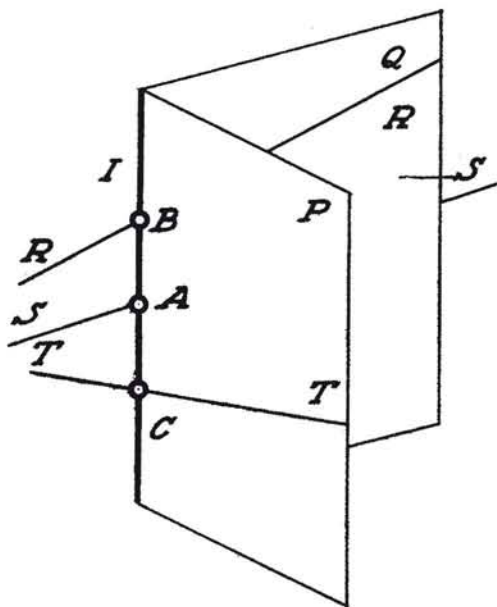


Fig. 264. — Recta que se apoya en otras tres.

Resolución en el sistema acotado. (Fig. 265.)

Sean las rectas R de cotas (-4) y $(+2)$, S de cotas $O (+5)$ y T de cotas $O (+8)$.

Elegimos el punto A sobre S de cota $(+5)$, y hallamos el plano Q determinado por dicho punto A y la recta R , trazando la recta auxiliar cualquiera $A-(+2)$.

Este plano tendrá por traza q_0 .

Hallemos igualmente el plano P constituido por A y T , trazando las horizontales p_0 y p_5 .

Este plano cortará al anterior según la recta I , que pasará necesariamente por el punto A y por el de encuentro de las trazas horizontales q_0-p_0 , dándonos lugar a los puntos B y C , que resuelven el problema.

Sistema diédrico. (Fig. 266.)

Las rectas dadas son $r-r'$ (de punta), $s-s'$ (horizontal), y $t-t'$ (frontal). Elijamos un punto cualquiera $a-a'$ de la recta $s-s'$.

Determinemos el plano constituido por dicho punto y la recta $r-r'$, que por ser ésta de punta con respecto al plano horizontal, hace que

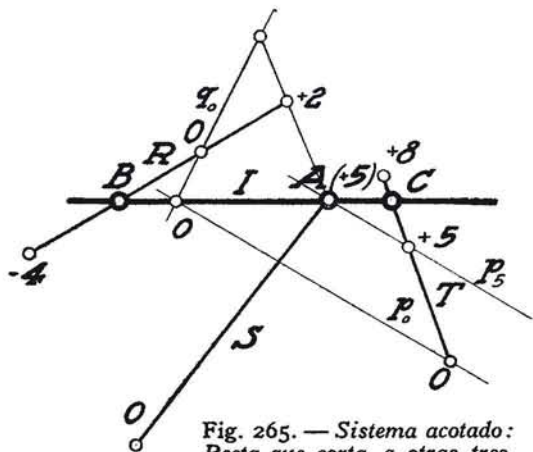


Fig. 265. — Sistema acotado:
Recta que corta a otras tres.

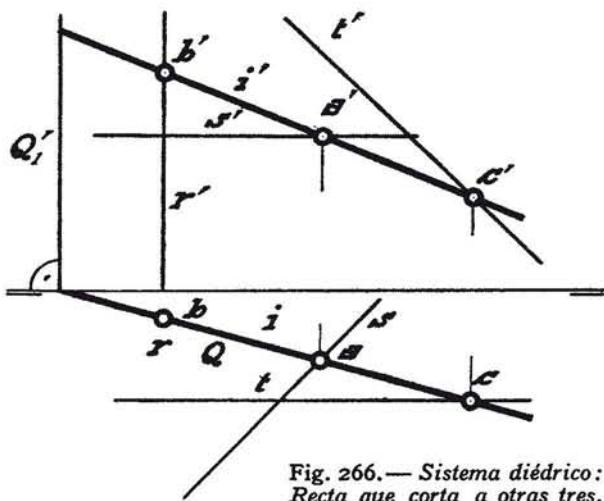


Fig. 266. — Sistema diédrico:
Recta que corta a otras tres.

dicho plano $Q-Q'$, sea un plano proyectante, el cual nos proporciona directamente el punto $c-c'$, que unido al a' de la proyección vertical, nos conduce a la determinación del b' , siendo la recta $i-i'$ la que responde a la cuestión.

Sistema axonométrico. (Fig. 267.)

Las rectas son $R-r'$, paralela a la cara $\overline{X-O-Y}$. La $S-s'$, paralela al eje $\overline{O-Z}$, y $T-t'$, paralela al plano $\overline{X-O-Z}$.

Elegido un punto $A-a'$ sobre S , determinaremos el plano Q for-

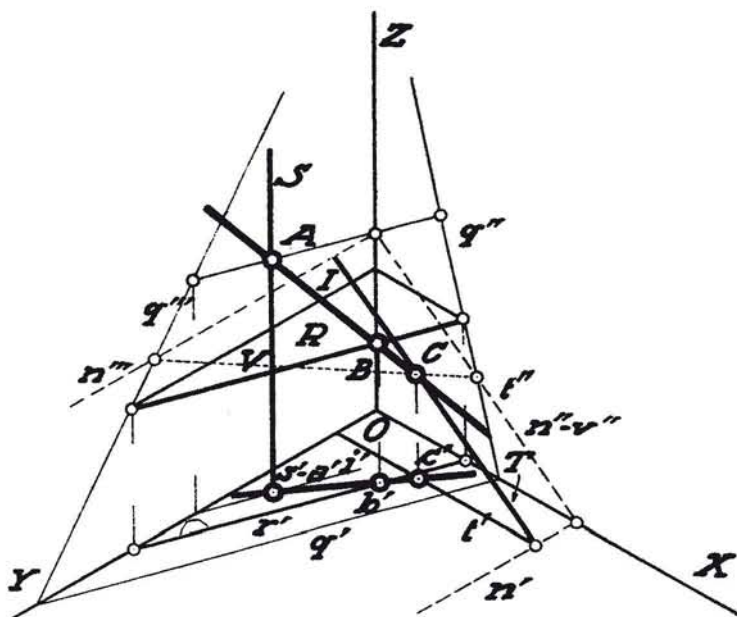


Fig. 267. — Sistema axonométrico: Recta que se apoya en otras tres.

mado por él y la recta $R: q'-q''-q'''$, que cortará a la recta T en el punto $C-c'$, siendo por tanto la recta $I-i'$ solución, la $A-C$ que corta a R en el punto $B-b'$.

Nota: Para determinar el punto $C-c'$ nos hemos auxiliado del plano proyectante $N (n'-n''-n''')$ de la recta $T-t'$, que nos ha dado la intersección auxiliar $V-v''$.

Si tuviéramos libertad, podríamos haber elegido un punto tal que el B sobre la recta R , y el problema se hubiera simplificado notablemente por ser la recta S paralela al eje $\overline{O-Z}$.

Sistema cónico. (Fig. 268.)

Las rectas son: $R-r$, perpendicular al geometral; $S-s$, paralela a él, y $T-t$, paralela al plano del cuadro.

Elegido el punto $A—a$ sobre $S—s$, hallaremos el plano P constituido por este punto y por $T—t$: $T_P—L_P$, que se conseguirá uniendo, el punto A con un punto cualquiera $M—m$ de la recta $T—t$, y determinando luego la intersección de este plano P con la recta R . Para ello nos valdremos del plano paralelo al plano vertical que pasa por R ,

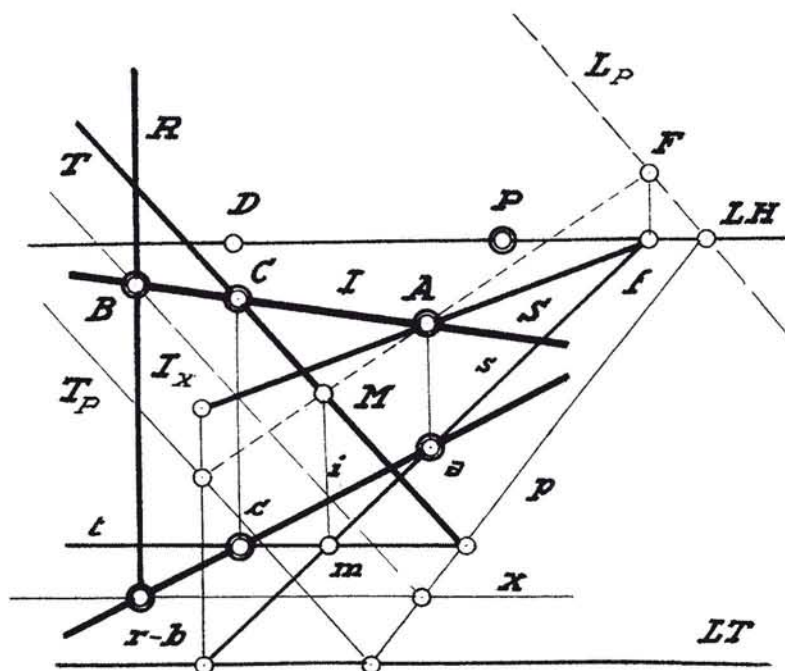


Fig. 268. — Sistema cónico: Recta que corta a otras tres.

cuya traza horizontal es x , que nos proporciona la intersección auxiliar I_x , la cual nos define el punto B . Este punto B , unido al A , nos da la recta solución $I-i$.

Como comprobación, $C-c$ han de hallarse en la misma línea de referencia sobre $T-t$.

Se puede simplificar esta construcción determinando primeramente el plano constituido por el punto $A-a$ y la recta R , pues entonces viene definida directamente i , y con ella conseguimos c , que al referirlo en C nos da la solución $\overline{A-C}$ y, por tanto, el punto B de la intersección I .

Recta que corte a otras dos y sea paralela a una tercera. (Fig. 269.)

Este problema es un caso particular del anterior.

Sean la recta $r-r'$ de punta con respecto al plano horizontal, y la frontal $s-s'$.

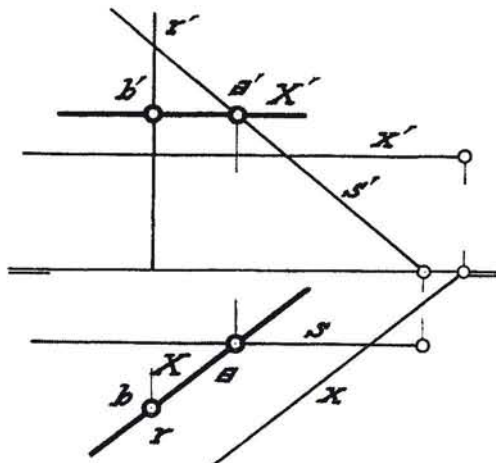


Fig. 269. — Sistema diédrico: Recta que corta a otras dos y es paralela a una tercera.

Se trata de obtener una recta, $X-X'$, que se apoye en estas dos y sea paralela a la recta dada $x-x'$.

Bastará trazar por r la paralela a x , determinándose así un plano (proyectante en este caso, por contener R) cuya traza es X . Este plano corta a la recta $s-s'$ en el punto $a-a'$, por el que trazaremos X' , que tiene común con R el punto $b-b'$.

CAPITULO VIII

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

Paralelismo. - Rectas paralelas entre sí. - Planos paralelos entre sí. - Rectas y planos paralelos entre sí. - *Perpendicularidad.* - Recta perpendicular a un plano. - Plano perpendicular a una recta. - Planos perpendiculares entre sí. - Rectas perpendiculares entre sí. - Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.

PARALELISMO

Rectas paralelas. En los tres primeros sistemas de representación, por tratarse de proyecciones cilíndricas, las rectas paralelas se proyectan también paralelas, pues al recordar que la proyección de una recta

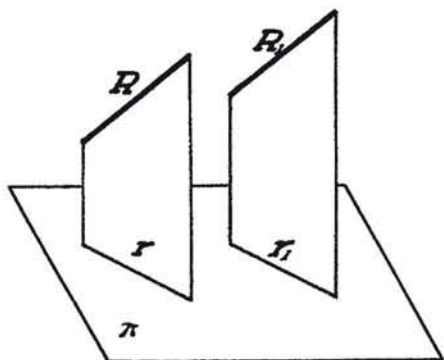


Fig. 270. — Rectas paralelas.

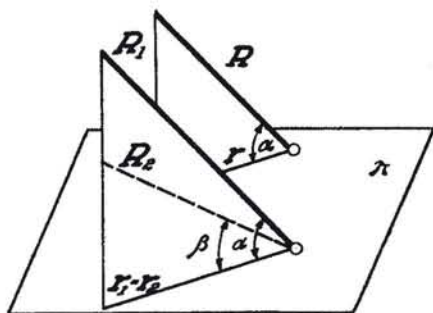


Fig. 271. — Rectas paralelas en el sistema acotado.

es la traza de su plano proyectante, siendo éstos paralelos entre sí, dan lugar a trazas paralelas. La figura 270 representa dos rectas R y R_1 paralelas entre sí, cuyos planos proyectantes tienen por trazas r y r_1 , proyecciones paralelas de las rectas en cuestión.

Rectas paralelas en el sistema acotado. (Fig. 271.) Sean dos rectas paralelas R y R_1 , que forman el ángulo α con el plano π de representación. Por la consideración anterior, sus proyecciones sobre dicho plano darán lugar a las paralelas r y r_1 .

Es preciso tener en cuenta que no basta en este sistema la condi-

ción de que sean paralelas las proyecciones r y r_1 , pues en estas mismas condiciones de proyección se encuentran las rectas R y R_1 , por ejemplo, pues por estar contenida R_2 en el mismo plano proyectante que R_1 , tiene su proyección ortogonal r_2 confundida con r_1 , no obstante formar con π un ángulo β distinto del que forman R y R_1 con él.

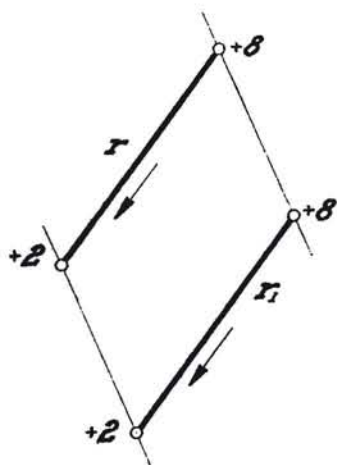


Fig. 272. — Sistema acotado. Representación de rectas paralelas.

Por este motivo, y como aparece en la figura 272, las proyecciones r y r_1 de las dos rectas del espacio habrán de tener como condición el que, además de representarse paralelas, tengan el mismo intervalo. Esto

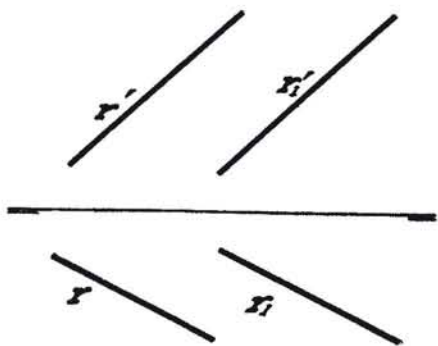


Fig. 273. — Sistema diédrico: Representación de rectas paralelas.

se aprecia al comprobar que las rectas de unión de puntos de la misma cota en las dos rectas, resultan también paralelas.

Aún se debe cumplir otra condición, y es: *que el sentido del intervalo sea el mismo para ambas rectas.*

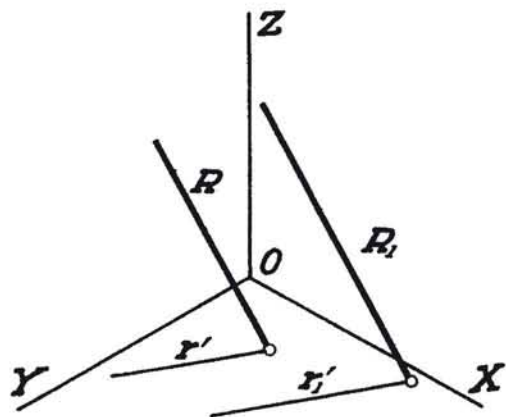


Fig. 274. — Sistema axonométrico: Representación de rectas paralelas.

Como resumen, para que en el sistema acotado dos rectas representen dos del espacio paralelas entre sí, habrán de reunir las tres condiciones siguientes: 1.^a Ser paralelas sus proyecciones. 2.^a Tener el mismo intervalo. 3.^a Que dicho intervalo sea del mismo sentido en las dos rectas.

Rectas paralelas en el sistema diédrico. (Fig. 273.) Por las mismas consideraciones hechas anteriormente, las proyecciones homónimas $r-r_1$ y $r'-r'_1$ habrán de trazarse paralelas para que representen rectas paralelas del espacio.

Rectas paralelas en el sistema axonométrico. (Fig. 274.) También aquí las proyecciones homónimas, tanto las directas $R-R_1$ como

cualquiera de los laterales $r'—r_1$, por ejemplo, resultarán paralelas si proceden de rectas paralelas en el espacio.

Rectas paralelas en el sistema cónico. (Fig. 275.) Según aparece en esta figura, las rectas paralelas del espacio $(R)—(R_1)$, cuyas proyecciones sobre el plano geometral son $(r)—(r_1)$, habrán de tener una representación en este sistema que obedezca a la ya conocida de una recta, motivo por el cual la obtención del punto de fuga F de

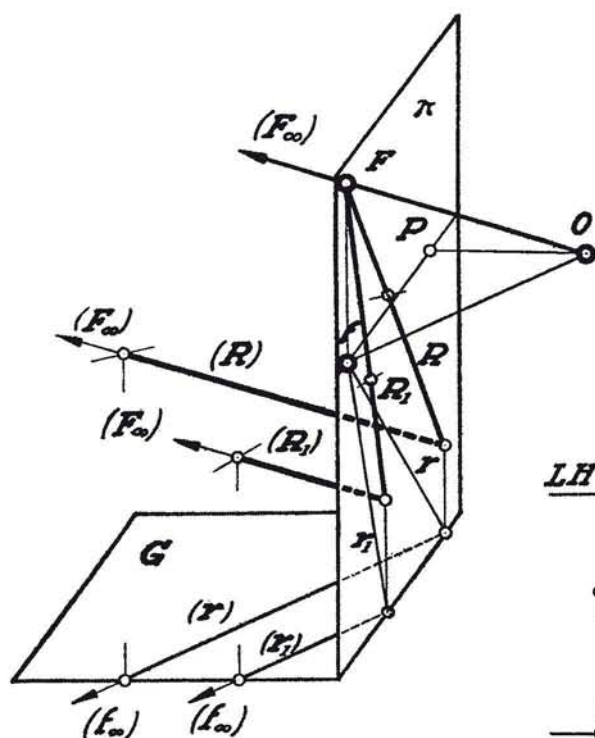


Fig. 275. — Sistema cónico:
Rectas paralelas.

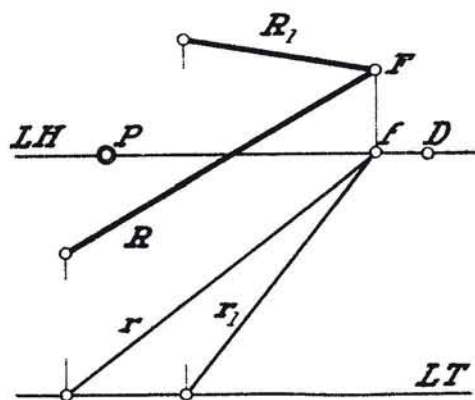


Fig. 276. — Sistema cónico: Representación
de rectas paralelas.

una de ellas, por ejemplo la (R) , se obtendrá, como sabemos, hallando la intersección con el plano del cuadro π de la paralela a dicha recta trazada por el centro de proyección O . Pero por tener común las dos rectas en cuestión el punto impropio (F_∞) , habrán de cortarse sus proyecciones respectivas R y R_1 en su punto de fuga; es decir, que serán convergentes en dicho punto F , tal y como se representa en la figura 276.

Lo propio sucederá con las proyecciones horizontales r y r_1 de las rectas mencionadas, que fugarán en el mismo punto f , proyección de F .

Como consecuencia, se aprecia que en este sistema el haz paralelo de rectas se representa mediante un haz convergente en el punto de fuga de la dirección de que se trata.

Planos paralelos entre sí. *Planos paralelos en el sistema acotado.* (Fig. 277.) Es indudable que siendo paralelos los planos P y P_1 , sus trazas sobre el plano de representación π habrán de ser también paralelas. Pero esta condición no es suficiente, pues además sus líneas de

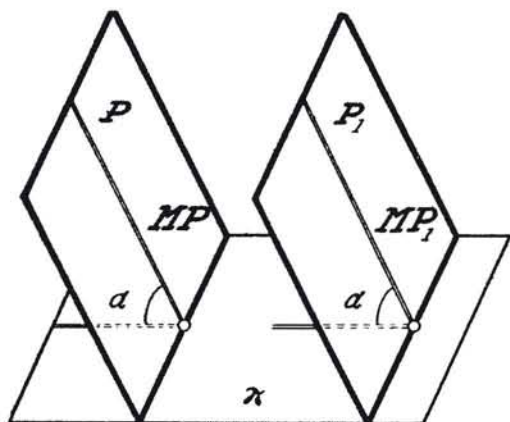


Fig. 277. — Planos paralelos en el sistema acotado.

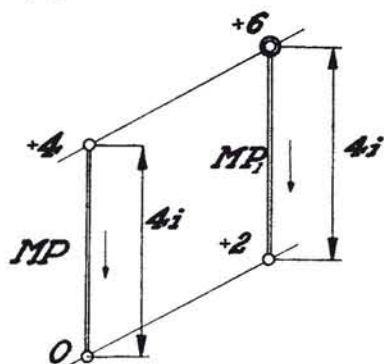


Fig. 278. — Sistema acotado: Representación de planos paralelos.

máxima pendiente MP y MP_1 habrán de resultar paralelas por tener que formar el mismo ángulo α con el mencionado plano de representación.

Por este motivo bastará, para que dos planos paralelos queden representados en este sistema acotado, que sus líneas de máxima pendiente MP y MP_1 , tal y como aparecen en la figura 278, cumplan con la condición de ser rectas paralelas. (Véase lo referente a la figura 272.)

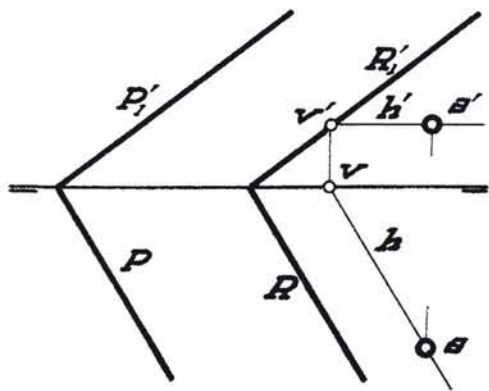


Fig. 279. — Sistema diédrico: Representación de planos paralelos. — Plano paralelo a otro que pase por un punto dado.

No es preciso, para comprobar su paralelismo, el unir puntos de una misma cota, sino, como aparece en la figura, distanciadas con el mismo número de intervalos ($4 \times i$), tomados en el mismo sentido que también nos indica se cumplen las tres condiciones.

Planos paralelos en el sistema diédrico. (Fig. 279.) En este sistema, las trazas homónimas han de ser paralelas, tal y como sucede con los planos $P-P_1$ y $R-R_1$. Se puede, por tanto, con esta sola condición, trazar por un punto dado $a-a'$ un plano paralelo a otro dado $P-P_1$. Para ello trazaremos por dicho punto, por ejemplo, una horizontal $h-h'$, la cual sabemos ha de tener su proyección horizontal h para-

lela a P , siendo h' paralela a la línea de tierra. (Véase fig. 112.) Dibujada esta recta, obtenemos su traza vertical $v-v'$; por v' habrá de pasar la traza vertical del plano paralelo, consiguiéndola mediante la paralela R' , que pasa por v' , y desde el punto donde ésta corte a la línea de tierra se trazará la recta R , paralela a P , traza horizontal del plano pedido.

Planos paralelos en el sistema axonométrico. (Fig. 280.) También en este sistema las trazas homónimas son paralelas. Y para la obten-

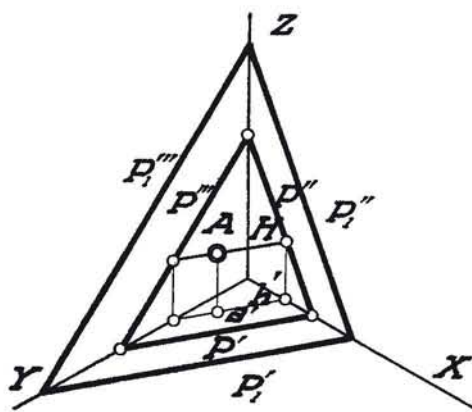


Fig. 280. — Sistema axonométrico: Representación de planos paralelos. — Plano paralelo a otro que pase por un punto dado.

ción de un plano paralelo a otro que pase por un punto dado, emplearemos el mismo artificio ya conocido desarrollado en relación con la figura anterior:

Sea el plano P_1 , al cual vamos a trazar otro paralelo P que pase por un punto $A—a'$. Empezaremos por trazar la horizontal $H—h'$ por el punto en cuestión (véase fig. 140), la cual se proyecta paralelamente a P_1' . Determinadas sus trazas laterales, por ellas habrán de pasar las trazas P'' y P''' , respectivamente, paralelas a sus homónimas P_1'' y P_1''' .

Planos paralelos en el sistema cónico. (Figuras 281 y 282.) Sean los dos planos paralelos (S) y (S_1) , los cuales tienen por trazas con el plano del cuadro π las rectas S y S_1 ; su recta impropia se proyectará según la recta límite ya conocida L_S , trazando por el centro de proyección O el plano S' paralelo a los anteriores.

Esto nos da el procedimiento para conseguir la representación de planos paralelos en el sistema cónico, tal y como aparece en la figura 282, donde las trazas $S-S_1$, siendo paralelas, complementan con la recta límite común L_s la representación de dos planos paralelos.

Las trazas horizontales s y s_1 de los planos paralelos fugarán así-

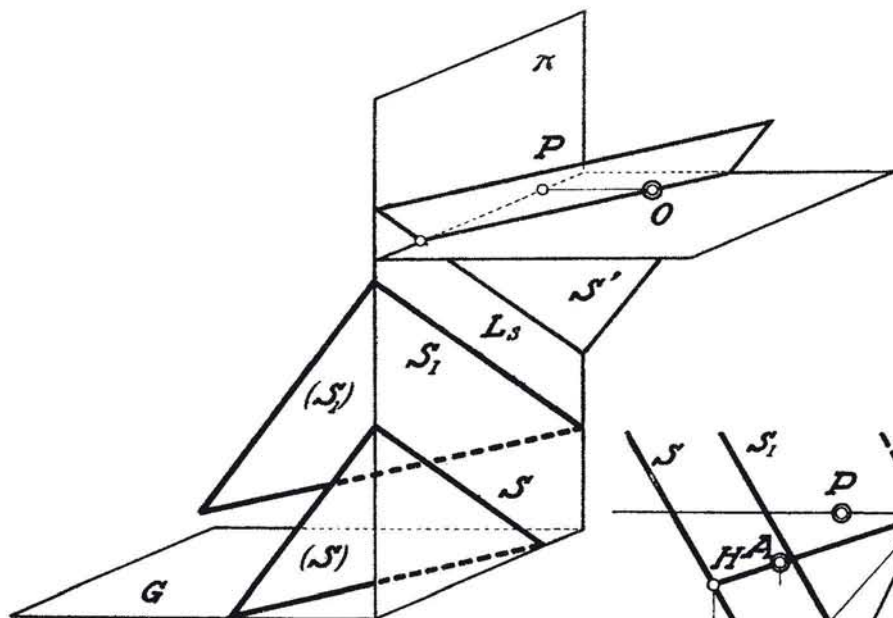


Fig. 281. — Sistema cónico: Planos paralelos.

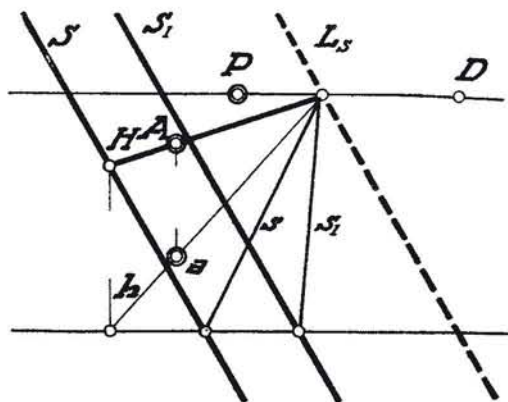


Fig. 282. — Sistema cónico: Representación de planos paralelos. — Plano paralelo a otro que pase por un punto dado.

mismo, como todas las demás horizontales, en el punto de encuentro de L_s con la línea de horizonte.

Para trazar por un punto $A-a$ un plano paralelo a otro dado por su traza S_1 y su recta límite L_s , trazaremos una horizontal del plano en cuestión $H-h$ que pase por dicho punto, con la condición de que fugue en el punto de encuentro de L_s con la línea de horizonte. De esta forma se obtiene su traza sobre el plano del cuadro, y por ella se dibujará la paralela S a S_1 que, en unión de L_s , completará la representación del plano paralelo que pase por el punto dado.

Rectas paralelas a un plano. (Fig 283.) Resulta indeterminada la posición de una recta que cumpla la condición exigida, por ser infinitas aquellas que la cumplen. Por este motivo bastará elegir una recta R de un plano P y trazar una cualquiera R_1 que le sea paralela, pues entonces se cumplirá la condición de que la recta trazada R_1 tenga común con el plano dado se punto propio, es decir, le será paralela.

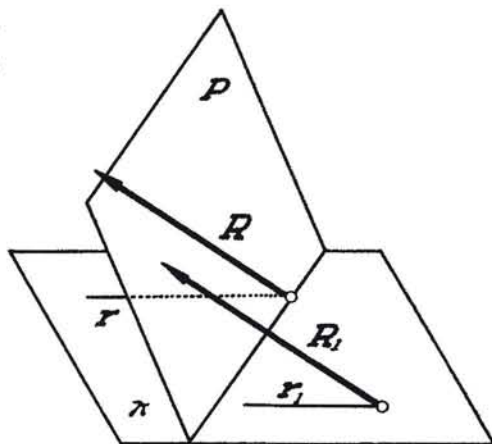


Fig. 283. — Recta paralela a un plano.

Recta paralela a un plano dado en el sistema acotado. (Fig. 284.) El plano está dado por su línea de máxima pendiente, de cota O y $(+6)$. Se ha trazado una recta R en este plano, y por un punto cualquiera del espacio otra R_1 que cumple con las condiciones de representación estipuladas en relación con la figura 272.

Recta paralela a un plano en el sistema diédrico. (Fig. 285.) Se empieza por situar una recta $r-r'$ en el plano dado $P-P'$, eligiendo

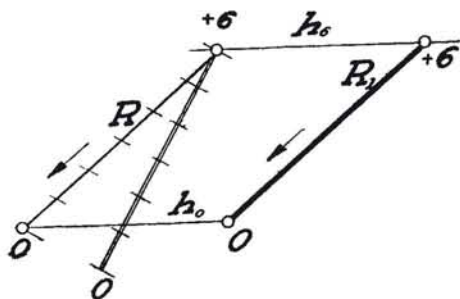


Fig. 284. — Sistema acotado: Recta paralela a un plano dado.

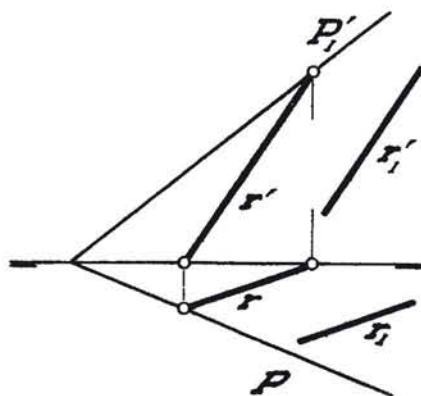


Fig. 285. — Sistema diédrico: Recta paralela a un plano.

dos cualesquiera de sus puntos, que en este caso son: situado el uno en el plano horizontal y el otro en el plano vertical de proyección. La recta $r_1-r'_1$, cuyas proyecciones homónimas son paralelas a $r-r'$, cumple la condición exigida.

Recta paralela a un plano en el sistema axonométrico. (Fig. 286.)
 Basta observar esta figura para, repitiendo una construcción análoga

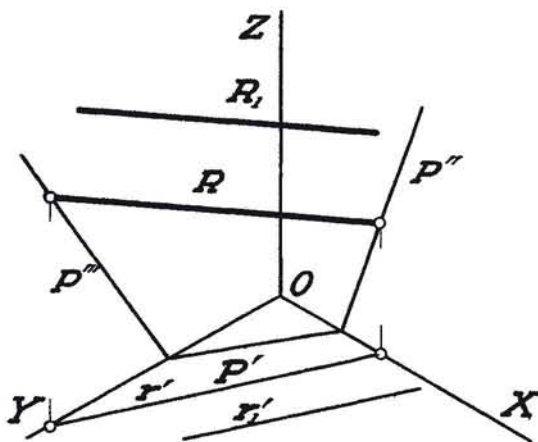


Fig. 286.—Sistema axonométrico: Recta paralela a un plano.

en relación con la anterior, obtener la recta $R_1-r'_1$ paralela al plano dado P .

Recta paralela a un plano en el sistema cónico. (Fig. 287.) Dado un

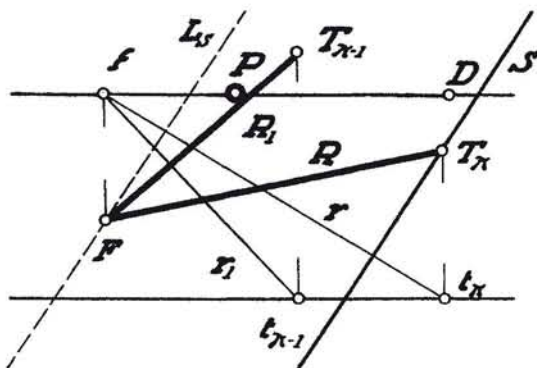


Fig. 287.—Sistema cónico: Recta paralela a un plano.

plano $S-L_S$, se eligen dos puntos $T_\pi-t_\pi$ y $F-f$ para situar en él una recta $R-r$; la recta R_1-r_1 cumple la condición de ser paralela al plano, por fugar en el mismo punto $F-f$, siendo sus trazas: $t_{\pi-1}$ y $T_{\pi-1}$.

PERPENDICULARIDAD

Teorema de las tres perpendiculares. (Fig. 288.) Por ser de frecuente aplicación, se recuerda el teorema mencionado, que dice así: Si dos rectas $A-B$ y $C-D$ son perpendiculares en el espacio, y una de ellas, $A-B$, es paralela a un plano π sobre el cual se proyecta el conjunto de las dos ortogonalmente, se obtienen dos rectas proyección, $a-b$ y $c-d$, que son también perpendiculares entre sí.

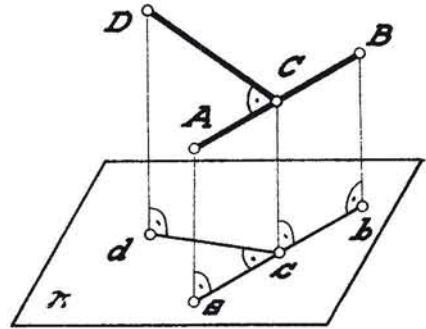


Fig. 288. — Teorema de las tres perpendiculares.

Recta perpendicular al plano. Sistema acotado. (Fig. 289.) Sea P el plano y Q una recta perpendicular a él.

En virtud del teorema anteriormente enunciado, la proyección q sobre el plano π de representación tendrá que ser perpendicular a la traza T_P del plano en cuestión con dicho plano π al ser, por definición, la recta perpendicular a todas las del plano P , incluso a la T_P .

Con esto ya tenemos una condición que debe cumplir la representación de la recta perpendicular a un plano en este sistema. Sin embargo, no queda individualizada su posición en el espacio, y por ello debemos relacionar su pendiente con la del plano para que quede definida.

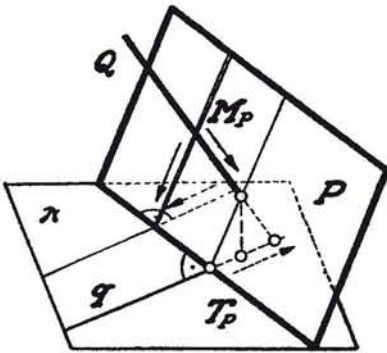


Fig. 289. — Recta perpendicular a un plano en el sistema acotado.

A tal fin, y teniendo presente la figura 290, si i_P es el intervalo correspondiente a la

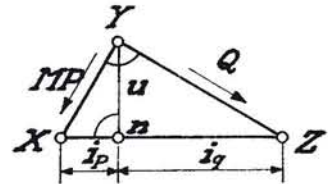


Fig. 290. — Relación de los intervalos de una recta y de un plano perpendiculares.

línea de máxima pendiente de un plano, se verificará que i_q habrá de ser el intervalo correspondiente a la perpendicular al plano en cuestión, desprendiéndose la sencilla construcción que figura para la obtención de dicho intervalo i_q , que se detalla a continuación:

Sobre uno de los extremos del intervalo i_P se levantará la perpendicular y se tomará sobre ella el segmento u , es decir, la unidad de altura, determinando así el punto Y ; unido éste con X , extremo de i_P ,

nos permitirá construir el triángulo rectángulo en Y: $\overline{X-Y-Z}$, de donde se deduce la siguiente relación por ser U media geométrica entre i_P e i_Q :

$$i_P \times i_Q = 1$$

o lo que es lo mismo:

$$i_Q = \frac{1}{i_P}$$

Lo que se traduce diciendo que los intervalos de la línea de máxima pendiente de un plano y de su perpendicular son inversos.

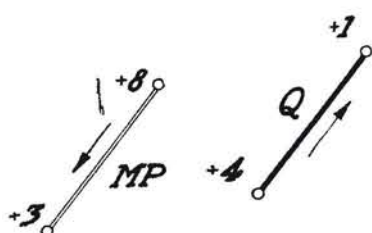


Fig. 291. — Sistema acotado: Representación de una recta perpendicular a un plano.

Teniendo en cuenta que la proyección de la perpendicular a un plano en este sistema es perpendicular a su traza, y que también la línea de máxima pendiente lo es, resultarán representadas paralelamente las dos rectas en cuestión, tal y como aparece en la figura 291, afectando a cada una de ellas del intervalo que les corresponda según la construcción indicada en relación con la figura 290; pero debiendo tener buen cuidado en considerar dichos intervalos en sentidos inversos, ya que, de lo contrario, la recta Q no sería perpendicular al plano.

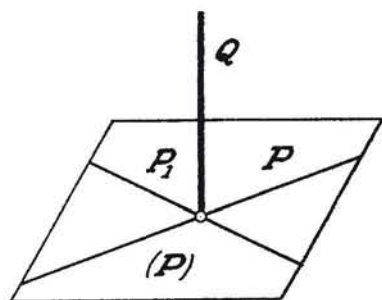


Fig. 292. — Recta perpendicular a un plano.

Perpendicular al plano en el sistema diédrico. (Fig. 292.) Para obtener la representación de una recta perpendicular a un plano en el sistema diédrico, recordaremos que la obtención de un plano (P) perpendicular a una recta (Q) se consigue trazando por un punto de ella dos rectas P y P_1 perpendiculares a la misma, lo que inversamente nos conduce a considerar la recta Q definida como la perpendicular a un par de rectas cualesquiera P y P_1 del plano (P) , al cual ha de resultar perpendicular, pasen o no por su punto común.

Representación de una recta perpendicular a un plano en el sistema diédrico. (Fig. 293.) Sea el plano $P-P'_1$.

En virtud de lo dicho anteriormente, y teniendo a la vista la propiedad que se deduce del teorema de las tres perpendiculares, vamos a elegir como par de rectas del plano en cuestión sus trazas $P-P'$ y $P_1-P'_1$. Por tal motivo, la proyección horizontal q de la perpendicular

lar habrá de proyectarse normalmente a P , y su proyección vertical q' también habrá de proyectarse ortogonalmente a P'_1 .

Observaremos que no solamente $q-q'$ se proyecta perpendicularmente a las trazas homónimas del plano, sino también a las proyecciones horizontales y verticales de las horizontales y de las frontales del plano.

Esto nos conduce a la resolución sencilla del:

Trazado de la perpendicular a un plano desde un punto dado. (Fig. 294.) Será suficiente el trazar desde las proyecciones del punto la perpendicular respectiva a la traza homónima del plano, para que quede representada la perpendicular $q-q'$.

También esta particularidad nos permite:

Trazar por un punto un plano perpendicular a una recta dada.

(Fig. 295.) Este problema es inverso del anterior, y para resolverlo recordaremos que las proyecciones de la perpendicular son ortogonales a las horizontales y a las frontales homónimamente consideradas. Por tanto:

Por el punto dado $a-a'$ trazaremos una frontal que quedará definida por tener que ser f' perpendicular a q' , y f paralela a la línea de tierra.

Esta frontal tiene por traza horizontal el punto $h-h'$; por tanto, si

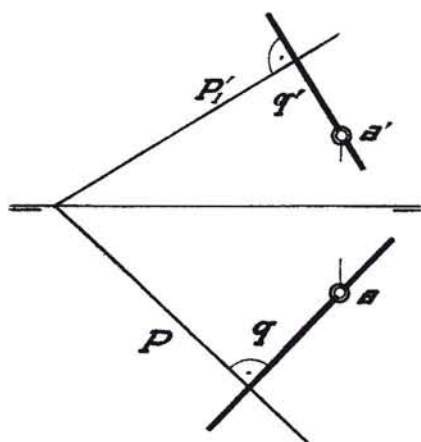


Fig. 294. — Sistema diédrico: Recta perpendicular a un plano que pase por un punto dado.

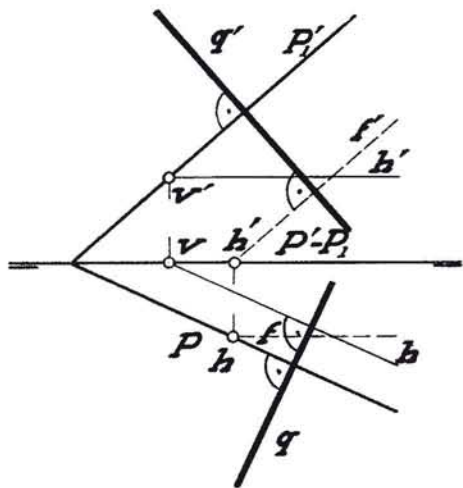


Fig. 293. — Sistema diédrico: Representación de una recta perpendicular a un plano.

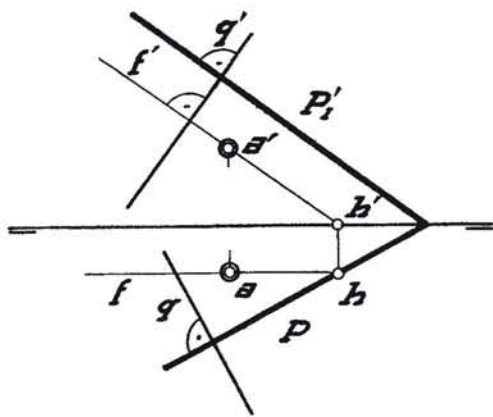


Fig. 295. — Sistema diédrico: Plano perpendicular a una recta que pase por un punto dado.

trazamos la perpendicular a q obtenemos la traza horizontal P del plano; y desde el punto en que ésta corte a la línea de tierra, la perpendicular P' a q' será su traza vertical.

Perpendicular a un plano en el sistema axonométrico. (Fig. 296.) Supongamos el plano dado por sus trazas $p'—p''—p'''$. Tratamos de obtener las proyecciones $Q—q'''$ de la perpendicular al plano.

Por de pronto, y teniendo presente el teorema de las tres perpendiculares, la proyección directa Q de la perpendicular será normal a la traza ordinaria del plano T_p .

En cuanto a la proyección lateral q''' , la habremos de definir teniendo

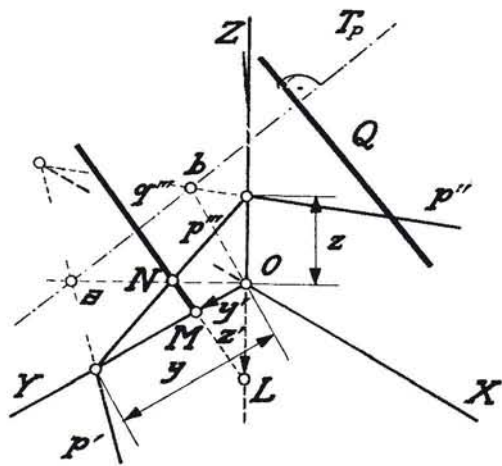


Fig. 296. — Sistema axonométrico: Representación de una recta perpendicular a un plano.

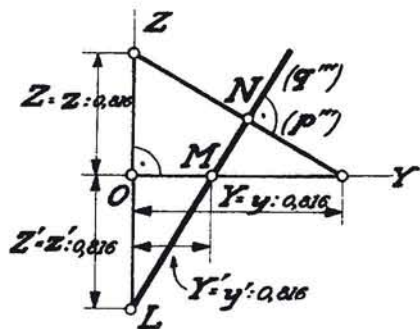


Fig. 297. — Determinación de las coordenadas de la perpendicular a un plano.

presente la deformación angular que trae consigo la representación en este sistema. Para ello nos auxiliaremos de la figura adjunta 297, en la cual se representa la cara del triedro $Z—O—Y$ confundida con el plano del dibujo; es decir, siendo ortogonales los ejes $O—Z$ y $O—Y$.

Teniendo presente la reducción que se verifica en la representación en este sistema de todos los segmentos paralelos a sus ejes, los cuales se hallan afectados del mismo coeficiente 0,816, tomaremos sobre dichos ejes las verdaderas dimensiones de los lados que componen el triángulo, cuya hipotenusa es (p''') ; es decir, tomando $Y = y : 0,816$ y $Z = z : 0,816$. Al considerar ahora el teorema ya citado de las tres perpendiculares y el mecanismo de este sistema de representación (figura 44), sabemos que sobre esta cara la proyección lateral (q''') de la perpendicular será normal a (p''') ; por tanto, podremos trazar, por un punto cualquiera, la recta $N—M—L$, que por tal condición inter-

ceptará sobre los ejes las coordenadas Y' y Z' , las cuales, para ser llevadas al sistema primitivo de la figura 286, es decir, proyectadas, se habrán de multiplicar por 0,816: $y' = Y' \times 0,816$ y $z' = Z' \times 0,816$.

Volviendo a la figura citada 296, llevaremos y' y z' , sobre los ejes correspondientes lo que nos permitirá reconstituir en su verdadera proyección la recta $\overline{L-M-N}$, que necesariamente nos representará la proyección q''' de la perpendicular sobre la cara del triedro trirectángulo $Z-O-Y$.

Sin embargo, y como se observa en la figura 298, podemos operar directamente con $y-z$ y con $y'-z'$, puesto que no se trata más que de obtener una dirección, motivo por el cual se llevarán sobre los lados de un ángulo recto $Z-O-Y$ los segmentos y y z , que nos determinan p''' (que resultará ser paralela a (p''') (fig. 297); trazaremos luego q''' , que nos da $y'-z'$,

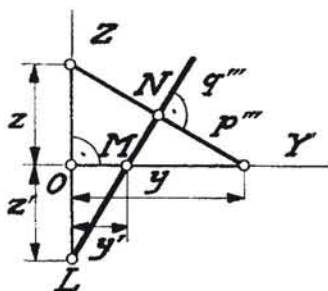


Fig. 298. — Simplificación de la figura anterior.

que llevaremos en la figura 296 directamente, consiguiéndose así la proyección lateral apetecida.

En la fi-

gura 299 aparecen todas las construcciones anteriores efectuadas con la máxima simplificación en el plano de representación, y que son las siguientes:

1.^a Tomando z como cateto, se construye el triángulo rectángulo $A-O-(a''')$ tomando $(y) = y$, mediante un arco de círculo de centro O , con el cual se obtiene este triángulo afín del $A-O-a'''$, siendo la dirección de afinidad $a'''-(a''')$ y el eje $O-Z$ el de afinidad.

2.^a Se traza desde O la perpendicular (q''') a la hipotenusa $A-(a''')$, determinando en ella el punto (b''') , cuyo afín es b''' .

3.^a La unión de O con b''' nos da q''' , proyección lateral de la perpendicular pedida.

Obsérvese que las coordenadas de b''' son las mismas que las de (b''') ; es decir, z' e y' .

Como comprobación, los extremos de las coordenadas y' e (y') habrán de hallarse en una recta paralela a la dirección de afinidad.

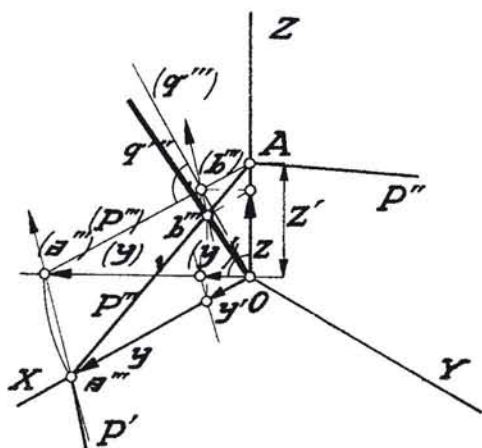


Fig. 299. — Sistema axonómico: Obtención definitiva y simplificada de una de las proyecciones laterales de la perpendicular a un plano.

Recíproco.—Obtener un plano perpendicular a una recta Q en el sistema axonómico. (Fig. 300.) La recta dada es $Q-q'$. Elegimos como traza ordinaria una recta P normal a Q , y con ella determinaremos los puntos c y d por donde habrán de pasar las trazas del plano P que buscamos; es decir, P' y P''' . (Recuérdese la fig. 245.) Nos bastará conocer la dirección de una de las trazas para que quede así definido el plano. Para ello resolveremos inversamente el problema de la figura anterior; es decir:

Prolongada q' , obtenemos sobre los ejes $O-X$ y $O-Y$ los puntos A

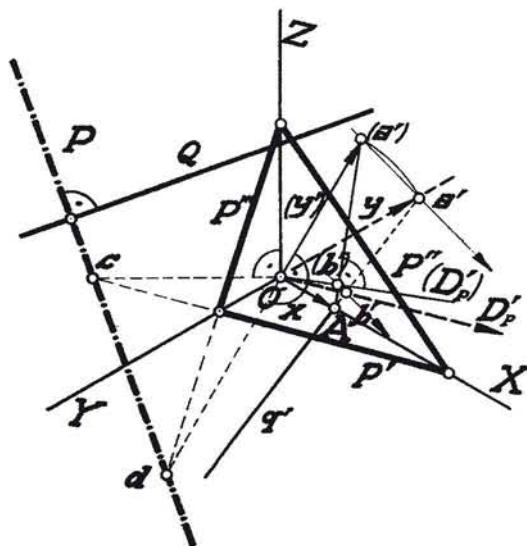


Fig. 300.—Sistema axonómico: Trazado de un plano P perpendicular a una recta dada $Q-q'$.

y a' , respectivamente, y transformaremos el triángulo $O-A-a'$ en su afín $O-A-(a')$, tomando $y = (y')$ sobre la perpendicular desde O al eje $O-X$.

Trazada la perpendicular (D'_p) a la hipotenusa $A-(a')$, obtendremos su afín D'_p mediante el punto b' , afín de (b') .

Esta D'_p es la dirección de la traza sobre la cara $X-O-Y$ perpendicular a q' , por lo que bastará trazar su paralela desde c para obtener P' . El punto en que esta recta corta al eje $O-Y$ unido con d , nos determina P''' , quedando así definido el plano pedido.

Recta perpendicular a un plano en el sistema cónico. (Fig. 301.) Sea (S) un plano y (Q) su perpendicular. La recta límite del plano es L_s , obtenida, como sabemos, trazando por O el plano S' paralelo al dado.

Si ahora tratamos de obtener el punto de fuga de la recta (Q) , trazaremos por O la recta Q' paralela a ella, que nos determinará el

punto F_Q , donde fugarán todas las proyecciones de las perpendiculares al plano en cuestión.

Vamos a determinar este punto F_Q en función de los elementos constitutivos de este sistema.

Queda construido en el espacio el triángulo $\overline{O-M-F_Q}$ perpendicular al plano del cuadro π , por contener la recta $\overline{O-P}$, que sabemos es la proyectante ortogonal del centro O ; P es el punto principal.

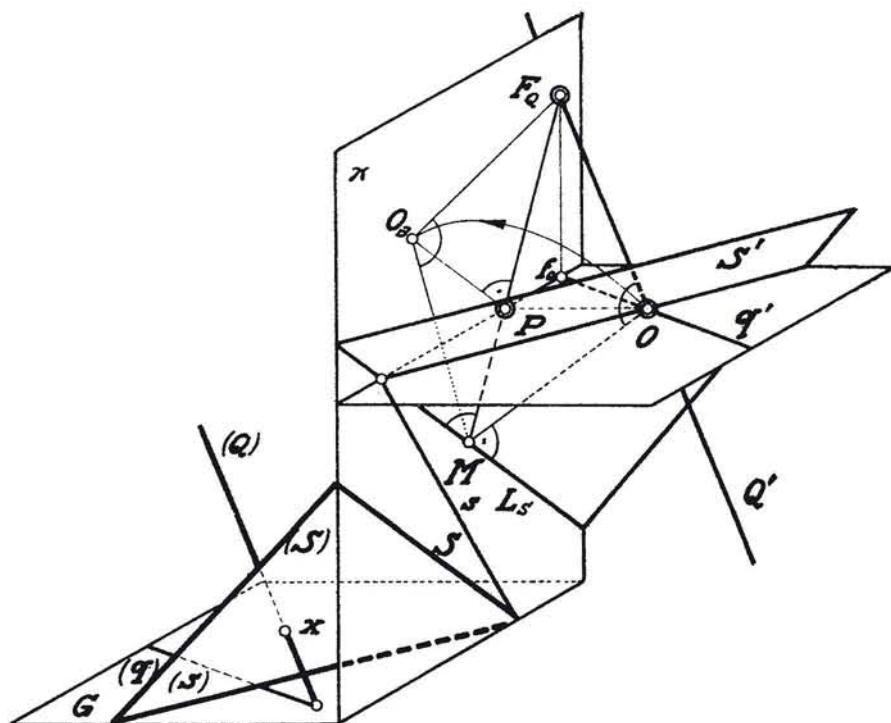


Fig. 301.—Sistema cónico: Perpendicular a un plano, y plano perpendicular a una recta.

Este triángulo es rectángulo en su vértice O por construcción, y su hipotenusa $\overline{F_Q-P-M}$ es perpendicular a L_S , recta límite del plano S , lo cual se demuestra teniendo presente que el plano del triángulo en cuestión está integrado: por la recta $\overline{F_Q-O}$, perpendicular al plano S' y, por tanto, a su recta límite L_S , y por la recta $\overline{O-P}$, perpendicular al plano π , que también lo será a su recta L_S . Esto motiva el que, siendo el plano del triángulo perpendicular a L_S , resulten ortogonales las rectas en cuestión: $\overline{F_Q-P-M}$ y L_S . La construcción de este triángulo nos será muy sencilla si consideramos que su altura es el segmento $\overline{O-P}$, y entonces aparece la construcción de la figura 302, donde se han efectuado las operaciones que se detallan:

El plano está dado por su traza S y su recta límite L_S , y también conocemos, como siempre ha de suceder, el punto principal P y el punto de distancia D .

Por lo expuesto anteriormente, el punto F_Q se habrá de encontrar en la perpendicular $\overline{P-M}$ trazada desde P a la recta límite L_S , y el segmento $\overline{F_Q-M}$ será la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya altura sea $\overline{P-D} = \overline{P-O}$, siendo su pie el mismo punto P .

En definitiva, se traza: 1.º Desde P la perpendicular a la recta

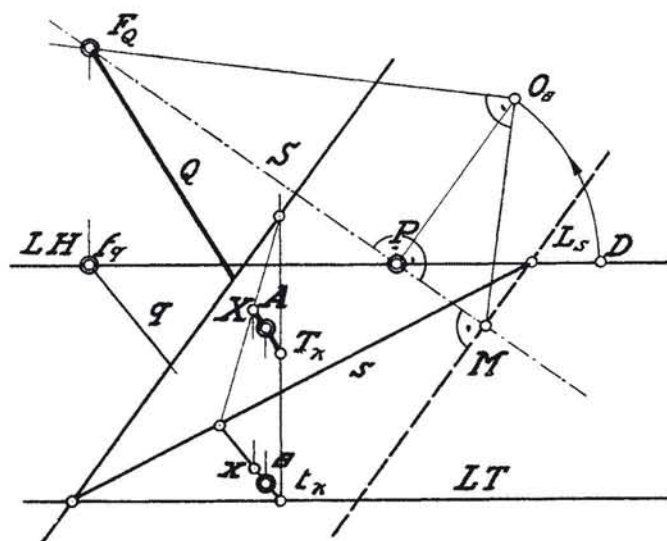


Fig. 302. — Sistema cónico: Obtención del punto de fuga de los perpendiculares a un plano. — Id. de la recta límite de los planos perpendiculares a una recta. — Trazado de una recta perpendicular a un plano por un punto dado.

límite L_S . 2.º Desde el mismo punto P , la paralela a dicha recta límite L_S . 3.º Sobre ella se toma un segmento $\overline{P-O_a} = \overline{P-D} = \overline{P-O}$. 4.º Se une O_a con M ; y 5.º Desde O_a se traza su perpendicular hasta su encuentro con $\overline{P-M}$, dándonos lugar al punto F_Q , que se proyecta horizontalmente sobre la línea LH en f_q . En la figura aparece trazada la perpendicular $Q-q$ que pasa por el punto dado $A-a$, la cual se obtiene uniendo únicamente las proyecciones homónimas del punto dado y del impropio F_Q-f_q . Además, se ha obtenido el punto $X-x$, traza de la perpendicular $Q-q$ con el plano dado $S-L_S$.

Si se quisiera efectuar el problema recíproco, es decir: *Hallar un plano perpendicular a una recta en el sistema cónico*, bastaría tener presente las dos figuras 301 y 302, y efectuar las construcciones en sentido inverso partiendo del punto de fuga F_Q de la recta dada; es decir:

Si se quisiera efectuar el problema recíproco, es decir: *Hallar un plano perpendicular a una recta en el sistema cónico*, bastaría tener presente las dos figuras 301 y 302, y efectuar las construcciones en sentido inverso partiendo del punto de fuga F_Q de la recta dada; es decir:

1.º Se une F_Q con P . 2.º Se levanta la perpendicular a esta recta desde P . 3.º Se toma sobre ella el segmento $\overline{P-O_a} = \overline{P-D} = \overline{P-O}$. 4.º Se une F_Q con O_a . 5.º Se traza la perpendicular $\overline{O_a-M}$ a $\overline{O_a-F_Q}$, obteniéndose así el punto M ; y 6.º Se traza la recta L_S , perpendicular a $\overline{F_Q-P}$, por el punto M .

Cualquier recta paralela a ésta, como, por ejemplo, S , podrá ser la traza de un plano perpendicular a la recta dada $Q-q$.

PLANO PERPENDICULAR A OTRO

Figura 303. Este problema está indeterminado y basta para que se cumpla la condición de que dos planos sean perpendiculares, como, por ejemplo, el P y el R , el que este último contenga una recta Q perpendicular al plano P , debiéndose elegir su traza T_R arbitrariamente o sujetarla a otra condición cualquiera, siempre que pase, como es lógico, por la traza de Q con P .

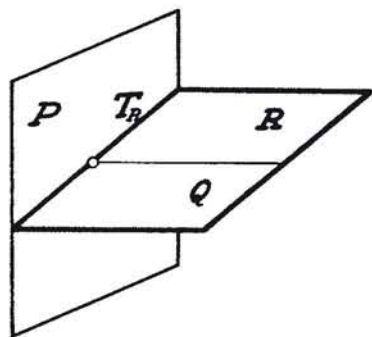


Fig. 303. — Plano perpendicular a otro.

RECTA PERPENDICULAR A OTRA

Figura 304. Supongamos que se trata de la recta Q .

Toda recta S o T del plano P perpendicular a ella, pase por su traza o no, cumplirá la condición exigida, debiéndose, por tanto, añadir otra condición para que quede así definida.

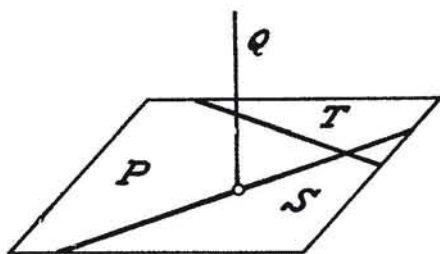


Fig. 304. — Recta perpendicular a otra.

PERPENDICULAR COMUN A DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Siempre que dos rectas se crucen, habrá otra que las corte ortogonalmente. Trataremos de su determinación en el próximo capítulo.

CAPITULO IX

D I S T A N C I A S

Medición de un segmento dado, en los cuatro sistemas de representación conocidos. - Determinación de la distancia de un punto a un plano. - Distancia de un punto a una recta. - Distancia entre dos rectas paralelas. - Distancia entre dos planos paralelos. - Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan.

Medición de un segmento rectilíneo proyectado ortogonalmente sobre un plano. (Fig. 305.) Sea $\overline{A-B}$ el segmento que se trata de medir, π el plano de representación sobre el cual se ha obtenido su proyección ortogonal $\overline{a-b}$.

Las alturas o cotas de los puntos A y B son H_A y H_B , respectivamente. Si por el punto A trazamos una paralela $\overline{A-B_1}$ a $\overline{a-b}$, dada la particularidad de la proyección ortogonal habremos construido un triángulo rectángulo caracterizado por:

- 1.º Cateto $\overline{A-B_1}$ = proyección $\overline{a-b}$ = d .
- 2.º Cateto $\overline{B-B_1}$ = h = $H_B - H_A$.
- 3.º Hipotenusa $\overline{A-B} = D$ = segmento proyectado.

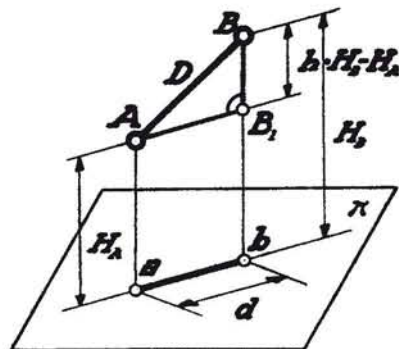


Fig. 305. — Distancia entre dos puntos o medición de un segmento rectilíneo.

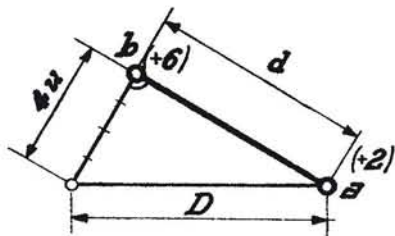


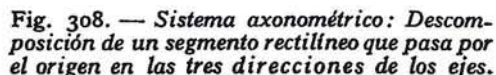
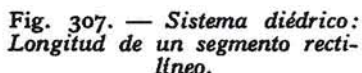
Fig. 306. — Sistema acotado: Medición de un segmento rectilíneo.

De aquí se deduce la forma de conseguir la verdadera magnitud de un segmento proyectado en las condiciones anteriores y que va a consistir en construir un triángulo rectángulo cuyos catetos son: su proyección d y la diferencia de cotas o de alturas h de los extremos del segmento.

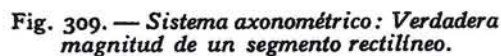
Medición de un segmento rectilíneo en el sistema acotado. (Fig. 306.) Supongamos que los extremos del segmento dado son los a y b , de cotas $(+2)$ y $(+6)$, respectivamente.

Construyamos un triángulo rectángulo en b , en que el otro cateto

Medición de un segmento rectilíneo en el sistema diédrico. (Fig. 307.)
El segmento dado es $\overline{a-b}$, $\overline{a'-b'}$. Por el extremo de la proyec-



Medición de un segmento rectilíneo en el sistema axonométrico. (Fi-



Este segmento $\overline{O-M}$ se descompone en tres: x, y, z , que siguen la dirección de los tres ejes coordenados.

En la figura 309 aparece la construcción gráfica que nos da la longitud $\overline{A-E}$ como verdadera magnitud del segmento $\overline{O-M}$, construyendo los triángulos rectángulos $\overline{A-B-C}$ y $\overline{A-C-E}$

porque sabemos que la diagonal de un paralelepípedo responde a la ecuación siguiente $D^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$.

En el triángulo $\overline{A-B-C}$ aparecen, por tanto, como catetos, X e Y , que son los medidos en la figura x e y , divididos por el coeficiente de reducción 0,816, y en el triángulo $\overline{A-C-E}$ aparece Z como cateto igual a $z : 0,816$.

Podríamos haber simplificado esta construcción con el auxilio de los triángulos $\overline{A-b-c}$ y $\overline{A-c-e}$, que nos dan d , la cual, dividida por 0,816, nos da la verdadera magnitud D , con lo cual hemos hecho únicamente

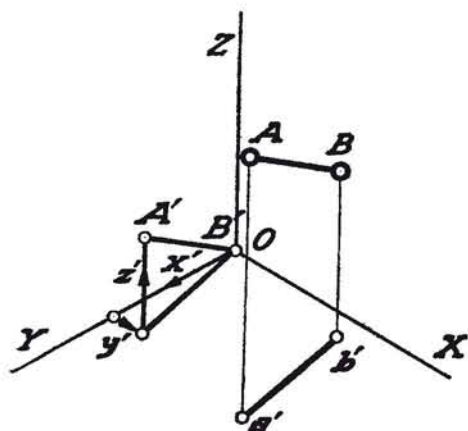


Fig. 310. — Sistema axonométrico: Reducción del caso general al anterior.

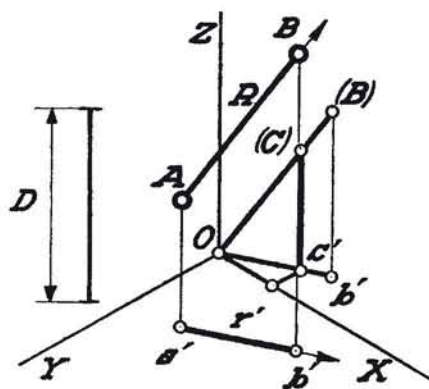


Fig. 311. — Sistema axonométrico: Proyectar un segmento rectilíneo de magnitud dada partiendo de un punto y en un sentido convenido.

una reducción en vez de tres que hubieran sido necesarias en el caso de haber resuelto el problema con las coordenadas verdaderas: X , Y , Z .

Si se tratara de un segmento cualquiera aislado en el espacio $\overline{A-B}$ (figura 310) de proyección $\overline{a'-b'}$, lo trasladaríamos al origen según $\overline{A'-B'}$, quedando descompuesto este último en sus tres coordenadas principales x' , y' , z' , y reduciéndose este caso al anterior.

Proyectar un segmento rectilíneo de magnitud dada en el sistema axonométrico, partiendo de un punto de una recta también dada y en un sentido convenido. (Fig. 311.) Sea la recta $R-r'$, $A-a'$, el punto a partir del cual hay que tomar el segmento de magnitud D y en el sentido indicado por la flecha.

Trasladaremos la recta $R-r'$ al origen O , como se ha indicado en la figura anterior; en ella elegiremos un punto $(C)-c'$ y hallaremos la verdadera magnitud del segmento $\overline{O-(C)}$ mediante la construcción

gir como sistema coordinado el integrado por el plano del cuadro π , el plano geometral G y el plano principal, perpendicular a la línea de tierra y que pasa por el centro de proyección O .

Nota: Se han hallado las verdaderas magnitudes de las coordenadas utilizando gráficamente la 4.^a proporcional en los lados de un ángulo cualquiera, α , tomando sobre ellos 0,816 y 1,000 y trazando paralelas a la recta de unión de sus extremos.

Las tres coordenadas de un punto en el sistema cónico. (Fig. 313.) Vamos a ele-

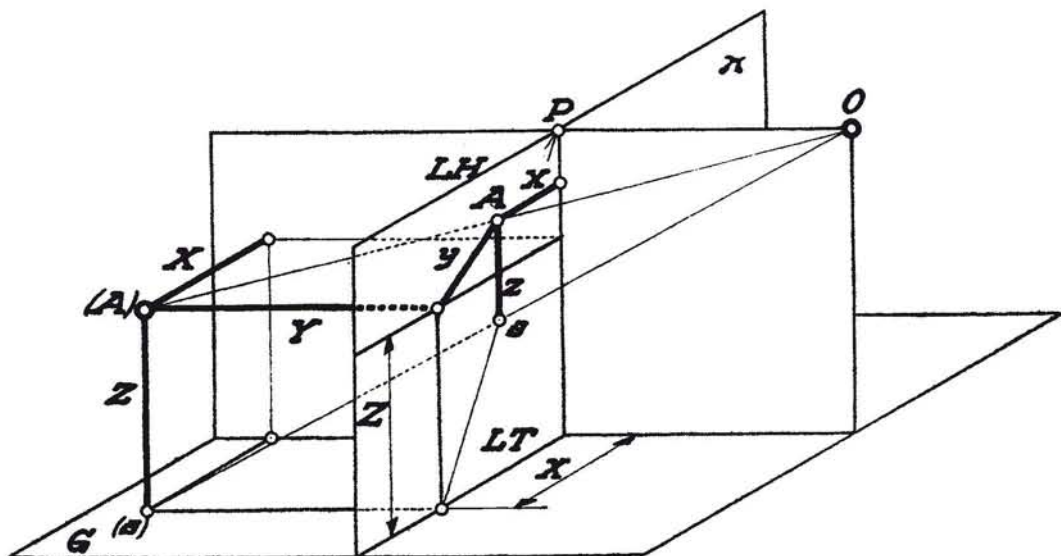


Fig. 313. — Las tres coordenadas de un punto en el sistema cónico.

Vamos a tratar de medir estas coordenadas partiendo del punto representado. (Fig. 314.) Sea el punto $A—a$; desde el punto principal P , lo proyectamos ortogonalmente sobre el plano del cuadro, y las trazas de las proyectantes de A y a nos determinan directamente X y Z , verdaderas magnitudes de los segmentos respectivos x y z de las coordenadas del punto en cuestión; es decir, de su distancia al plano principal y de su altura sobre el plano geométral, respectivamente.

Vamos a determinar ahora especialmente el alejamiento del punto al plano del cuadro; es decir, Y .

Para ello tengamos presente la figura 315, en la cual aparece un plano (S) paralelo al plano del cuadro, cuya distancia es Y . Este plano tiene por traza con el geométral la recta (s) paralela a la línea de tierra, que se proyecta en s , también paralela a la línea de tierra.

Es indudable que todos los puntos del plano en cuestión distan la misma cantidad Y del plano π , por lo que bastará medir la distancia de uno cualquiera de ellos, en este caso el N .

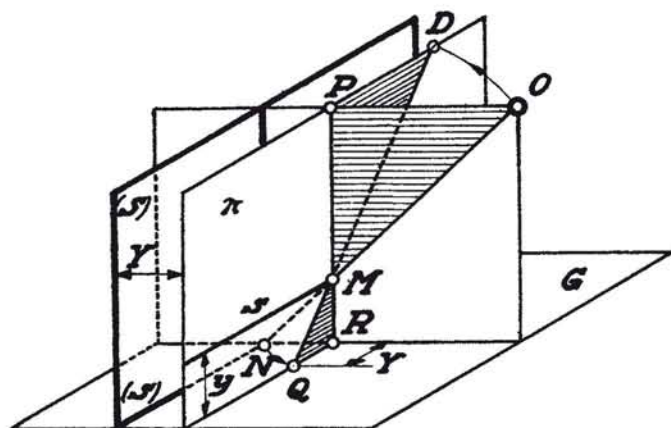


Fig. 315. — Sistema cónico: Distancia del plano del cuadro a otro paralelo a él.

donde aparece medida Y , por el cateto $Q—R$.

Por otro lado, observamos que, efectuado el giro en la forma hecha, el punto O viene a ocupar la posición del ya conocido punto de distancia, con lo que queda ya indicada la forma de obtener la magnitud Y en el sistema de representación.

Figura 316. Siendo $A—a$ el punto dado, es indudable que la recta s

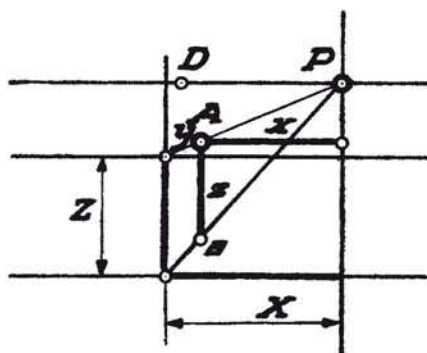


Fig. 314. — Sistema cónico: Medición de las coordenadas Z y X de un punto.

La proyección de N es M , y si consideramos los dos triángulos que se forman, $N—M—R$, $M—P—O$, y los hacemos girar alrededor de su recta común $P—M—R$, hasta su coincidencia con π , tendremos sobre el plano del cuadro los triángulos $Q—R—M$ y $P—D—M$,

que pasa por a será la traza sobre el geometral del plano paralelo al del cuadro, que dista una cantidad representada por y en la figura.

Como el punto M es fijo, bastará unirlo con el punto de distancia D para obtener el Q . El segmento $Q-R$ nos da la me-

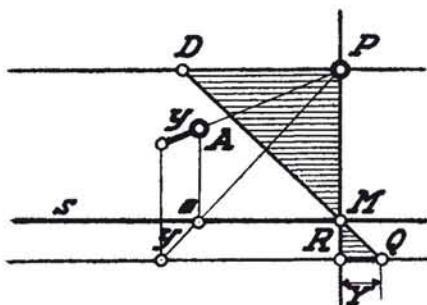


Fig. 316. — Sistema cónico: Medición de la distancia del plano del cuadro a otro que le es paralelo.

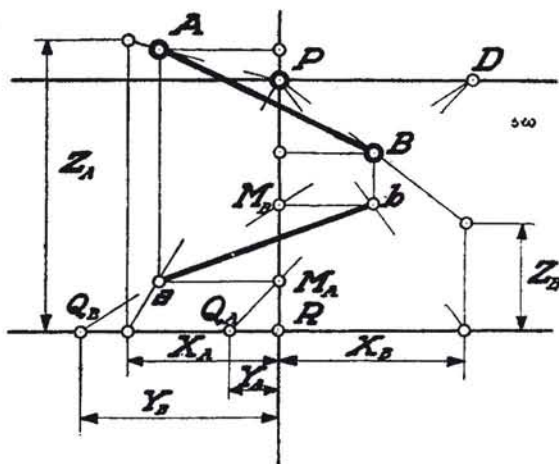


Fig. 317. — Sistema cónico: Medición de un segmento rectilíneo.

didada Y ; es decir, la tercera coordenada del punto A con respecto al plano del cuadro.

Con el conocimiento de la forma de conseguir las verdaderas magnitudes de las coordenadas de un punto podremos obtener las verdaderas magnitudes de segmentos cualesquiera, representados en este sistema.

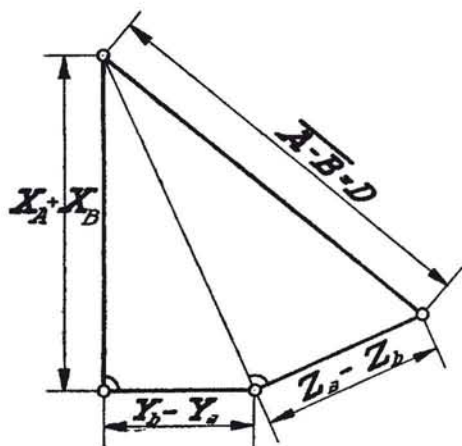


Fig. 318. — Obtención de la verdadera magnitud del segmento de la figura anterior.

sus distancias al plano principal, X_A y X_B . También conoceremos sus alejamientos del plano del cuadro, Y_A e Y_B , medidos por $R-Q_A$ y $R-Q_B$, respectivamente.

Teniendo en cuenta los signos de estas coordenadas, mediante la

Problema directo. Determinar la verdadera magnitud de un segmento rectilíneo representado en el sistema cónico. (Fig. 317.) A fin de conocer las coordenadas de los puntos extremos del segmento dado $A-B$, repetiremos la construcción hecha en relación con las figuras 314 y 316.

Aparecen proyectados los extremos $A-B$ sobre el plano del cuadro, que nos dan sus cotas Z_A y Z_B , así como

construcción gráfica que aparece en la figura 318 conoceremos directamente la longitud del segmento $A-B = D$.

Problema inverso.—Representar en el sistema cónico un segmento de longitud dada sobre una recta, a partir de uno de sus puntos, y en un sentido determinado. (Fig. 319.) Sea la recta $R-r$, sobre la cual hay que llevar un segmento de longitud D a partir del punto $A-a$ y en el sentido indicado por la flecha.

Obtendremos primeramente la verdadera magnitud de un segmento cualquiera de esta recta, para luego, por proporcionalidad, situar el punto extremo. A tal fin elegimos el punto $B-b$, situado en el plano principal, a fin de ahorrarnos alguna construcción, puesto que en este caso X_B es cero.

Auxiliándonos de la figura 320, y repitiendo lo efectuado en relación con la figura 317, hallamos la verdadera magnitud d del segmento $A-B$; y considerando

en dicha figura 320 el punto A como centro de homotecia, y con la relación d a D , obtendremos asimismo las coordenadas del punto extremo C , que nos permitirá situar dicho punto $C-c$ en el plano de representación, auxiliándonos, por ejemplo, del plano horizontal de cota Z_C o de su distancia al plano principal X_C .

Más adelante veremos que existe un procedimiento mucho más sencillo, utilizando la homología, que nos permite resolver este problema

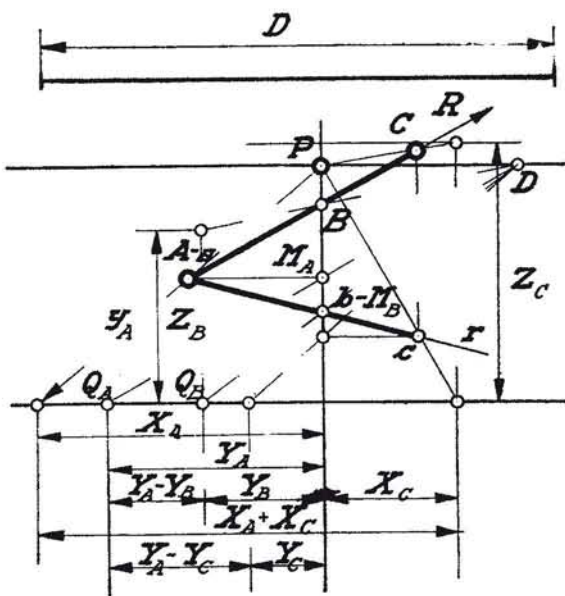


Fig. 319. — Sistema cónico: Hallar las proyecciones de un segmento de longitud dada, llevado sobre una recta, a partir de uno de sus puntos y en sentido convenido.

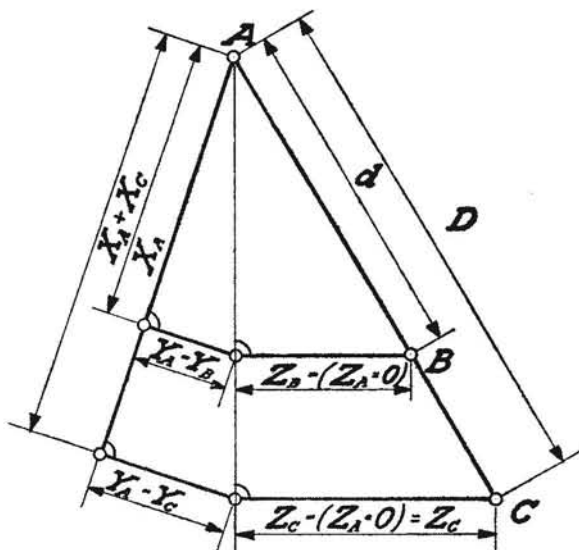


Fig. 320. — Cálculo gráfico para la figura anterior.

y sus análogos con gran ahorro de construcciones y, por tanto, con mucha mayor exactitud.

DISTANCIA DE UN PUNTO AL PLANO

Figura 321. La distancia de un punto A a un plano S se consigue midiendo la longitud D del segmento p de la perpendicular trazada desde A al plano, hasta su traza B . Teniendo presente esta figura del espacio en todos los sistemas de representación, conseguiremos el resultado deseado, pues las operaciones que se precisa efectuar para conseguirlo nos son ya conocidas.

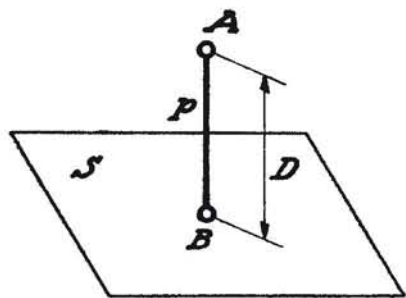


Fig. 321. — Distancia de un punto a un plano.

Determinación de la distancia de un punto a un plano en el sistema acotado. (Figura 322.) Sea el plano S dado por su línea de máxima pendiente y el punto a de cota $(+5)$.

Trazaremos la perpendicular al plano S desde el punto a , teniendo en cuenta lo ya dicho en relación con la figura 291, y luego determinaremos la intersección b de esta perpendicular con dicho plano, para lo cual nos hemos auxiliado de dos planos horizontales: uno de altura cero que nos proporciona la horizontal s_0 del plano dado, y la h_0 , de dirección arbitraria, que pasa por el punto (0) de la perpendicular que nos dan el punto de intersección m , y como segundo plano auxiliar, el horizontal de altura $(+4)$ que nos da, asimismo, las horizontales s_1 y h_1 , las cuales nos producen el punto n de la intersección i , resultando por medio de ella el punto b de cota $(+2,5)$.

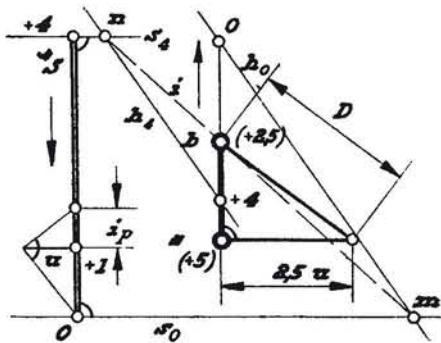


Fig. 322. — Sistema acotado: Distancia de un punto a un plano.

Construyendo ahora el triángulo rectángulo cuyo cateto es $a-b$, y que tiene por altura: $+5u - 2,5u = 2,5u$, siendo u la unidad de altura, obtendremos la verdadera distancia D del punto al plano.

Determinación de la distancia de un punto a un plano en el sistema diédrico. (Figura 323.) Supongamos que el punto dado es el $a-a'$ y el plano: $S-S'$. Tracemos por el primero la perpendicular $p-p'$ (véase

fig. 294), hallemos la intersección de ésta con el plano, para lo cual nos hemos auxiliado de su plano proyectante vertical, que mediante sus puntos $h-h'$ y $v-v'$ nos da la intersección $i-i'$. Esta nos determina

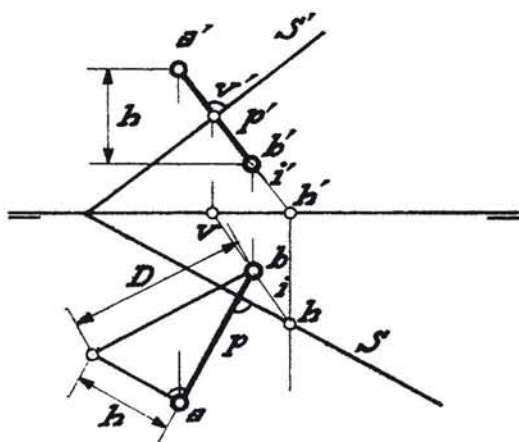


Fig. 323. — Sistema diédrico: Distancia de un punto a un plano.

el punto $b-b'$, con lo cual tenemos elementos suficientes para, repitiendo la construcción que aparece en la fig. 307, obtener la verdadera distancia D del punto A al plano S .

Determinación de la distancia de un punto a un plano en el sistema axonométrico. (Figura 324.) El plano dado es el $s'-s''-s'''$ y el punto: $A-a''$. Tracemos desde $A-a''$ la perpendicular $P-p''$ al plano S , teniendo presente la construcción que aparece en la figura 299. Se limita esta perpendicular hallando su traza $B-b''$ con el plano S , para lo cual hemos utilizado el plano proyectante de la recta $P-p''$ sobre la cara $X-O-Z$, que nos determina la intersección I mediante sus puntos T_{xz} y T_{xy} . Se medirá este segmento como queda dicho en lo referente a la figura 310.

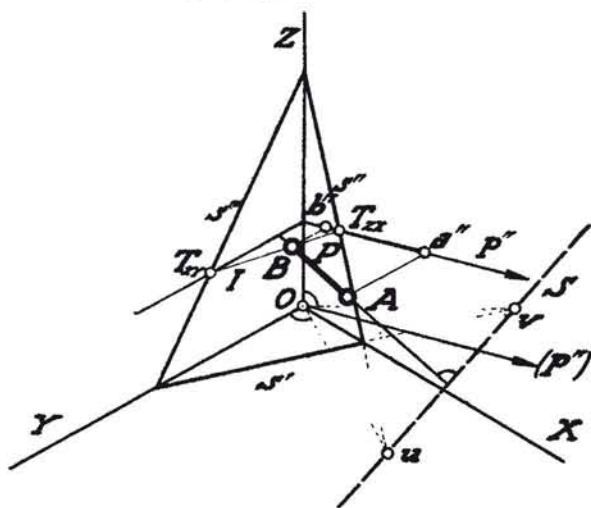


Fig. 324. — Sistema axonométrico: Distancia de un punto a un plano.

Distancia de un punto a un plano en el sistema cónico. (Fig. 325.)
El plano dado es $S-L_S$ y el punto: $A-a$.

Empezaremos por trazar la perpendicular $P-p$, que fugará en el punto F_P-f_p , según sabemos por lo explicado en la figura 302.

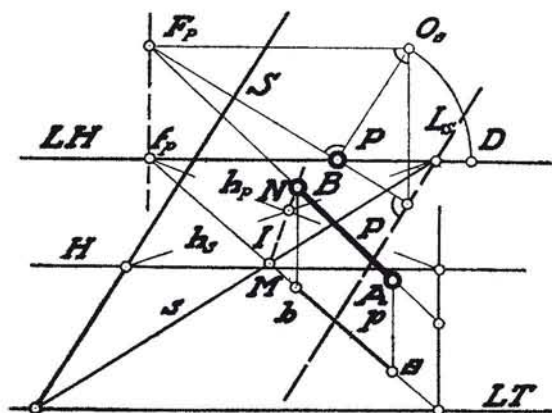


Fig. 325. — Sistema cónico: Distancia de un punto a un plano.

Utilizando ahora el plano proyectante horizontal de esta perpendicular, conseguimos el punto B mediante la intersección I de dicho plano proyectante con el dado $S-L_S$.

Esta intersección está integrada por el punto M , intersección de las trazas horizontales s y p , y por el punto N , intersección de las horizontales h_p y h_s producidas en los dos planos por el plano horizontal H que se ha tomado como auxiliar por

cortarse fuera de los límites del dibujo las trazas del plano S y del plano proyectante, así como sus rectas límites L_S y F_P-f_p .

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Figura 326. Supongamos que se trata de medir la distancia existente entre un punto A y una recta R .

Para ello trazaremos por el punto A el

plano S perpendicular a la recta R , determinando el punto B , traza de ambos. La medición de este segmento $A-B$ de la perpendicular P , nos dará la distancia apetecida D .

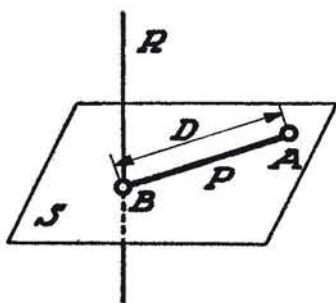


Fig. 326. — Distancia de un punto a una recta.

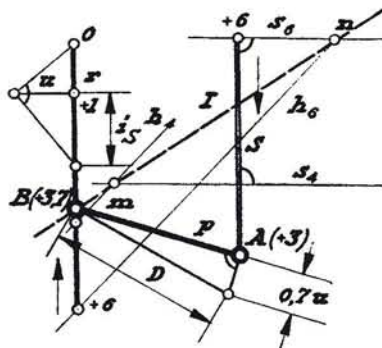


Fig. 327. — Sistema acotado: Distancia de un punto a una recta.

Distancia de un punto a una recta en el sistema acotado. (Fig. 327.) La recta r está dada por dos puntos O y $(+6)$, y el punto es el A de cota $(+3)$.

Empezaremos por trazar un plano perpendicular a la recta por el

punto dado A . Para ello trazaremos por A una paralela a r que representará la línea de máxima pendiente del plano, cuyo sentido es inverso al de la recta, siendo medido su intervalo i_s en la forma sabida.

De esta suerte se halla la intersección I del plano S con otro cualquiera que pase por la recta R , y se consigue el punto B , que resulta ser de cota $(+ 3,7)$.

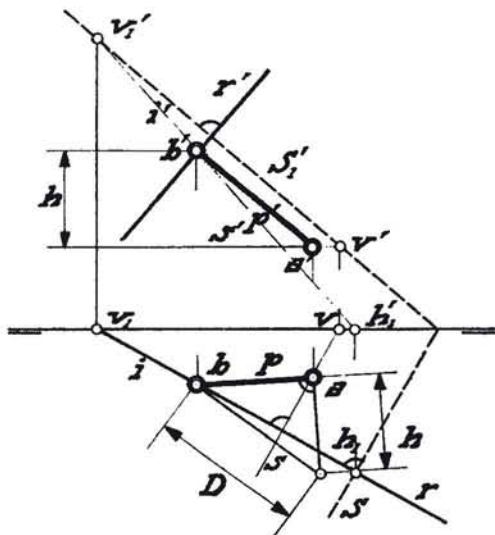


Fig. 328. — Sistema diédrico: Distancia de un punto a una recta.

Así tendremos ya la proyección horizontal del segmento p de perpendicular, es decir, $\overline{A-B}$, que tendrá como medida real D .

Distancia de un punto a una recta en el sistema diédrico. (Fig. 328.) Sean la recta $r-r'$ y el punto $a-a'$.

Repitiendo la construcción que aparece en la figura 295, trazaremos el plano $S-S'$ perpendicular a la recta $r-r'$. La intersección de este plano con la recta dada es el punto $b-b'$, que se ha conseguido auxiliándonos del plano proyectante horizontal de la recta R ; es decir, mediante los puntos $h_1-h'_1$ y $v_1-v'_1$, que nos determinan la intersección $i-i'$. Conocidas las proyecciones del segmento: $\overline{a-b}$, $\overline{a'-b'}$, obtendremos su verdadera dimensión D mediante la construcción ya conocida.

Distancia de un punto a una recta en el sistema axonométrico. (Figura 329.) La recta dada es $R-r'$ y el punto: $A-a'$.

Para trazar el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto A , ya que desconocemos, de momento, la dirección de sus trazas, excepto la de la ordinaria, emplearemos el siguiente artificio que nos simplifica el problema:

Haremos pasar por el punto en cuestión $A-a'$ un plano paralelo

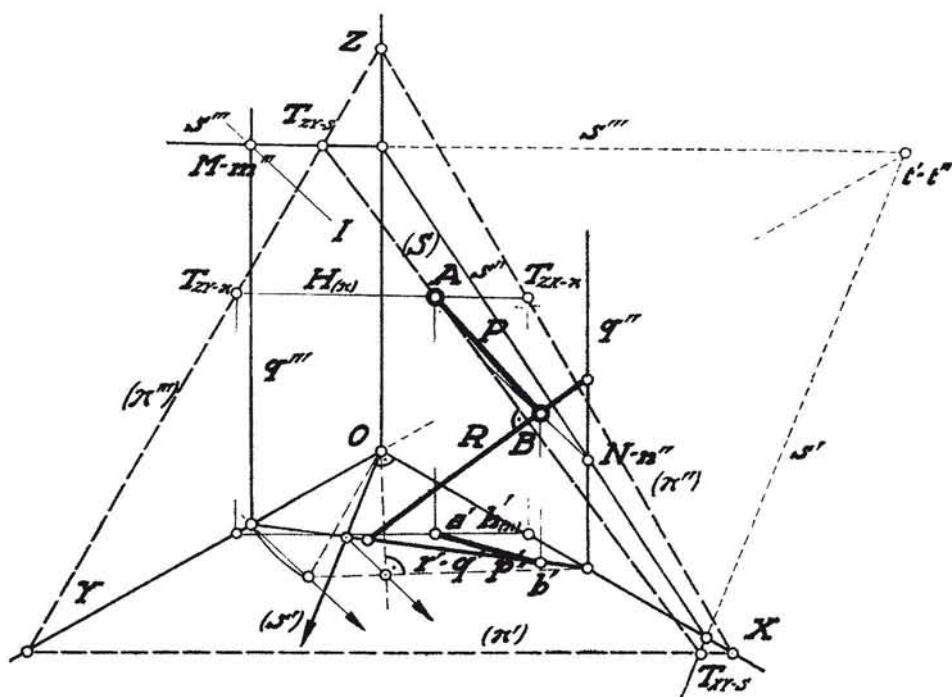


Fig. 329. — Sistema axonométrico: Distancia de un punto a una recta.

al de referencia: $(\pi')—(\pi'')—(\pi''')$, el cual situaremos utilizando la horizontal $H_{(\pi)}—h'_{(\pi)}$.

La traza ordinaria (S) del plano perpendicular pasará entonces por el punto A , proyección directa, y será perpendicular a R .

Con auxilio de la construcción indicada en relación con la figura 300 obtendremos (s') , dirección de la traza del plano perpendicular a la recta en la cara $X—O—Y$; por tanto, desde el punto T_{XY-S} trazaremos s' paralela a (s') , que nos determina el punto $t'—t''$ en el eje $O—Y$, punto que nos sirve para que quede definida la traza s''' , por conocer la traza T_{ZY-S} de una recta del plano (S) , con lo cual queda ya definido dicho plano perpendicular.

La traza $B—b'$ de la recta R con el plano S se consigue utilizando

el plano proyectante $q'-q''-q'''$, que nos da la intersección I mediante sus puntos $N-n''$ y $M-m'''$.

Conocida la proyección $a'-b'$ del segmento $A-B$, obtendremos la verdadera distancia, según hemos aprendido por las figuras 308 y 309.

Distancia de un punto a una recta en el sistema cónico. (Fig. 330.) La recta dada es $R-r$ y el punto: $A-a$.

Para trazar el plano perpendicular por A empezaremos por hallar la recta límite L_s de los planos perpendiculares a esa dirección $R-r$, aplicando lo dicho en relación con la figura 302.

Elegido un plano $S-L_s$ mediante la horizontal H_s-h_s lograremos el punto $B-b$, hallando la intersección I de dicho plano $S-L_s$ con el plano proyectante de la recta. Esta intersección I está integrada por los puntos M y N ; M proviene de las trazas horizontales s y r , y N de las horizontales h'_s y h' , situadas en el plano auxiliar H' .

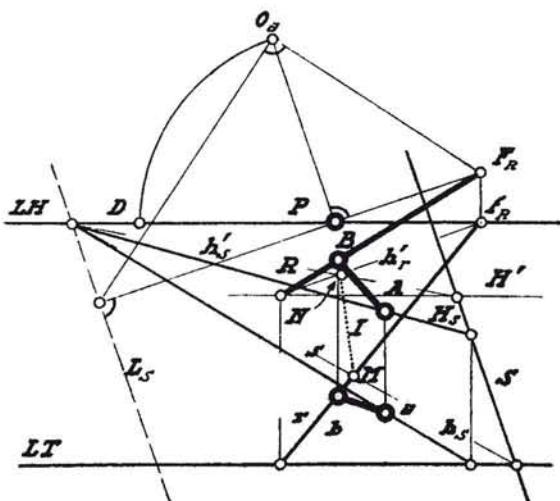


Fig. 330. — Sistema cónico: Distancia de un punto a una recta.

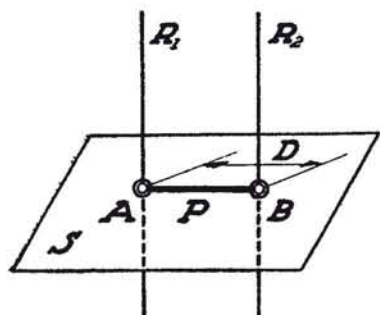


Fig. 331. — Distancia entre dos rectas paralelas.

en trazar un plano S perpendicular a ambas rectas, que dará lugar a dos puntos A y B en R_1 y R_2 , respectivamente, habiéndose de medir el segmento de perpendicular común P en la forma sabida y según el sistema en que se haya de resolver el problema:

Distancia entre dos rectas paralelas en el sistema acotado. (Fig. 332.) Sean las rectas R_1 y R_2 .

DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS

Figura 331. El procedimiento consistirá

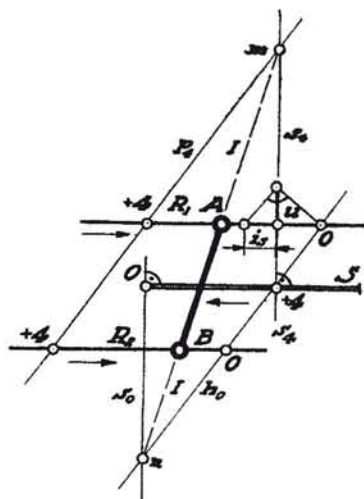


Fig. 332. — Sistema acotado: Distancia entre dos rectas paralelas.

Tracemos un plano perpendicular a ambas, según ya sabemos, y determinemos su intersección con el plano constituido por las dos rectas. Esta intersección I está conseguida mediante los puntos m y n , siendo m el punto de encuentro de las horizontales p_a del plano de las rectas y s_a de su perpendicular, y n , asimismo, el punto común a s_o y a h_o .

Determinación de la distancia entre dos rectas paralelas en el sistema diédrico. (Fig. 333.) Las rectas son $r_1-r'_1$ y $r_2-r'_2$. Se traza un plano cualquiera $S-S'_1$ perpendicular a ambas. Este plano corta a las rectas

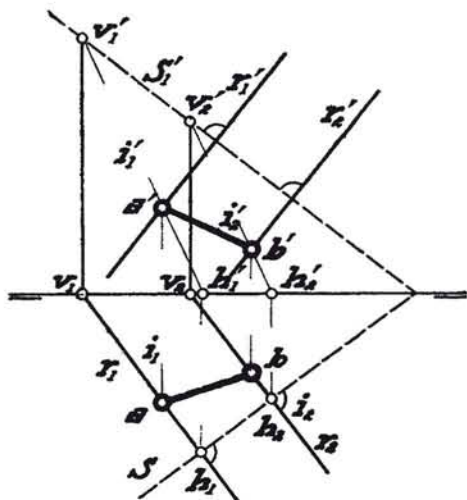


Fig. 333.—Sistema diédrico: Distancia entre dos rectas paralelas.

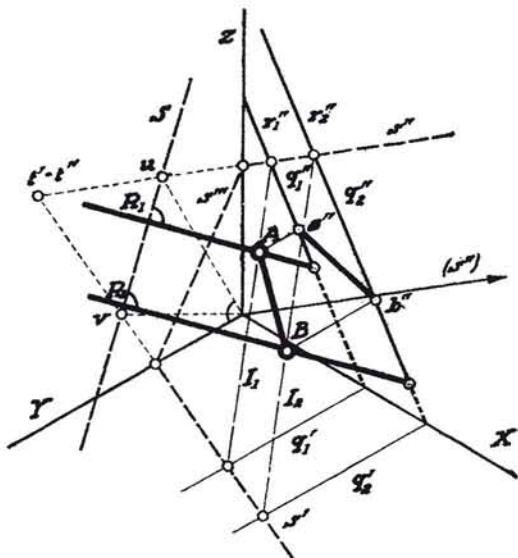


Fig. 334.—Sistema axonométrico: Distancia entre dos rectas paralelas.

en cuestión en los puntos $a-a'$ y $b-b'$. Estos puntos se han conseguido utilizando como planos auxiliares los proyectantes horizontales de las rectas, que han proporcionado las intersecciones $i_1-i'_1$ e $i_2-i'_2$, mediante los puntos $h_1-h'_1$, $v_1-v'_1$ y $h_2-h'_2$, $v_2-v'_2$. Como se observa, y era de prever, las intersecciones $i_1-i'_1$ e $i_2-i'_2$ se proyectan paralelas por ser intersecciones del mismo plano S con los dos planos proyectantes paralelos.

Determinación de la distancia entre dos rectas paralelas en el sistema axonométrico. (Fig. 334.) Sean las rectas R_1-r_1'' y R_2-r_2'' . El plano perpendicular que se ha trazado es el $s'-s''-s'''$, el cual produce las intersecciones I_1 e I_2 en los planos proyectantes elegidos $q'_1-q''_1$ y $q'_2-q''_2$.

De esta forma se conoce el segmento $\overline{A-B}$, $\overline{a''-b''}$.

Distancia entre dos rectas paralelas en el sistema cónico. (Fig. 335.)
Las dos rectas paralelas son R_1-r_1 y R_2-r_2 .

Hallada la recta límite L_s de los planos perpendiculares a la dirección de R , se elige uno cualquiera de ellos mediante su traza S paralela a L_s , y se halla su intersección con las rectas.

Para ello se han utilizado los planos proyectantes horizontales que nos producen las intersecciones I_1 e I_2 , conseguidas mediante los puntos M_1 y M_2 , en que se cortan las trazas horizontales: $s-r_1$ y $s-r_2$, en unión del punto F_1 , en que se cortan las rectas límites.

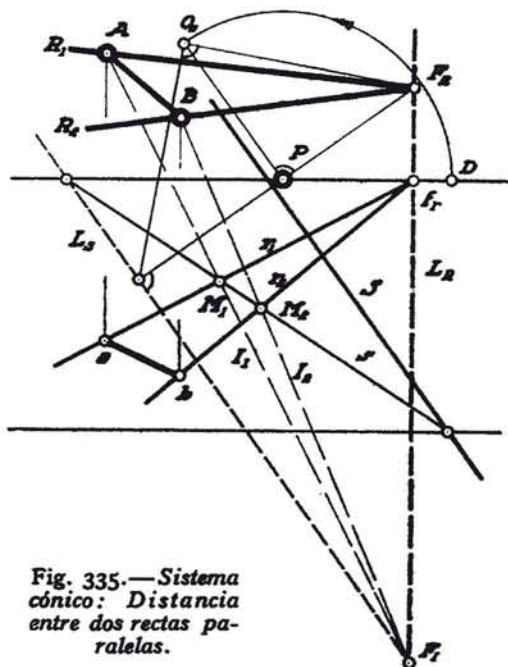


Fig. 335.—Sistema cónico: Distancia entre dos rectas paralelas.

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

Figura 336. Siendo S_1 y S_2 los planos paralelos, bastará trazar una perpendicular P a ambos y limitarla en los puntos A y B en que corta a dichos planos, midiendo luego el segmento D interceptado.

Distancia entre dos planos paralelos en el sistema acotado. (Fig. 337.)
Sean estos planos S_1 y S_2 . Se traza una perpendicular p cualquiera, según ya sabemos, la cual corta en los puntos a y b a cada uno de los planos. Estos puntos pro-

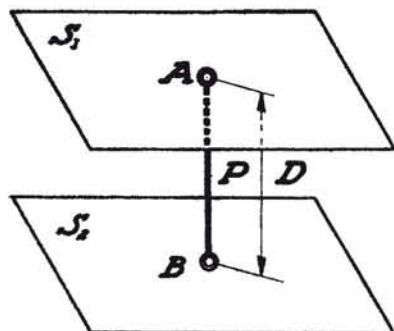


Fig. 336.—Distancia entre dos planos paralelos.

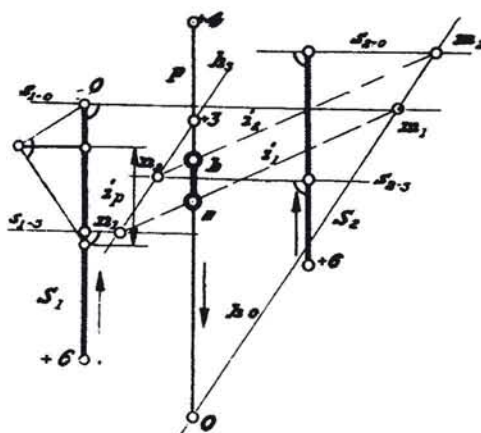


Fig. 337.—Sistema acotado: Distancia entre dos planos paralelos.

vienen de las intersecciones i_1 e i_2 , en que los planos en cuestión cortan a uno cualquiera que pase por la recta p , y en particular i_1 está determinado por m_1 y n_1 , siendo m_1 el punto común a la horizontal s_1 y h_0 , y n_1 común a s_1 y h_3 . Por haber utilizado el mismo plano que pasa por la recta p , la intersección i_2 es paralela a i_1 .

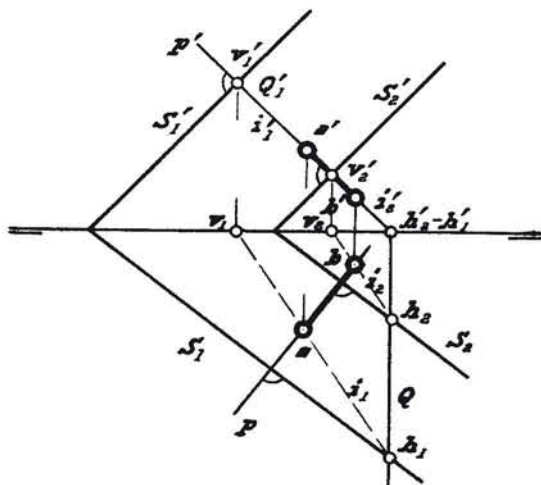


Fig. 338. — Sistema diédrico: Distancia entre dos planos paralelos.

Distancia entre dos planos paralelos en el sistema diédrico. (Figura 338.) Los planos son $S_1-S'_1$ y $S_2-S'_2$. La perpendicular trazada es $p-p'$ y las intersecciones de esta perpendicular con cada uno de los planos son los puntos $a-a'$ y $b-b'$.

Se ha utilizado el plano proyectante vertical de esta recta para hallar las intersecciones auxiliares $i_1-i'_1$ e $i_2-i'_2$.

Distancia entre dos planos paralelos en el sistema axonométrico. (Figura 339.) Los planos son $s'_1-s''_1-s'''_1$ y $s'_2-s''_2-s'''_2$.

Se empieza por determinar la traza ordinaria de uno cualquiera de estos planos S_1 , y de esta manera se obtiene la proyección directa P de la perpendicular. Según ya sabemos, determinaremos (p') , dirección de la perpendicular proyectada sobre la cara $X-O-Y$; por tanto, eligiendo p' como proyección de P , lograremos los puntos $A-a'$, $B-b'$, utilizando el plano proyectante $q'-q'''$, que nos proporciona las intersecciones paralelas I_1 e I_2 con cada uno de los planos dados.

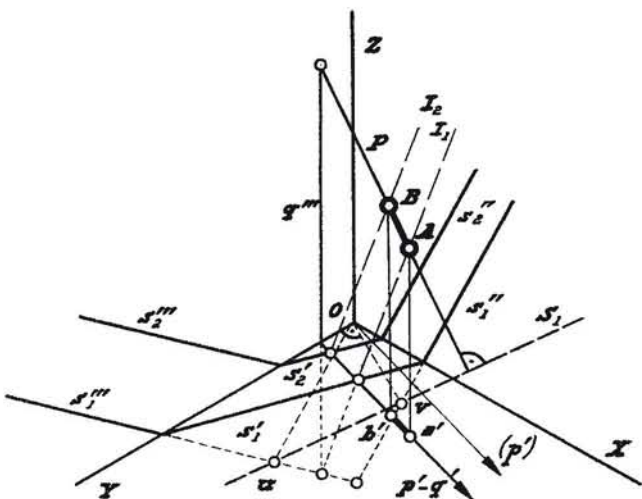


Fig. 339. — Sistema axonométrico: Distancia entre dos planos paralelos.

Distancia entre dos planos paralelos en el

sistema cónico. (Figura 340.) Sean los planos $S_1—L_S$ y $S_2—L_S$.

Empecemos por determinar el punto de fuga de las perpendiculares: $F_p—f_p$.

Tracemos una perpendicular cualquiera $P—p$, y hallemos su intersección con cada uno de los planos. Esto lo lograremos utilizando el plano proyectante horizontal de dicha perpendicular, que nos da las intersecciones $I_1—I_2$, conseguidas mediante el punto de fuga F_1 , y los M_1 y M_2 , en que se cortan las respectivas trazas horizontales $p—s_1$ y $p—s_2$.

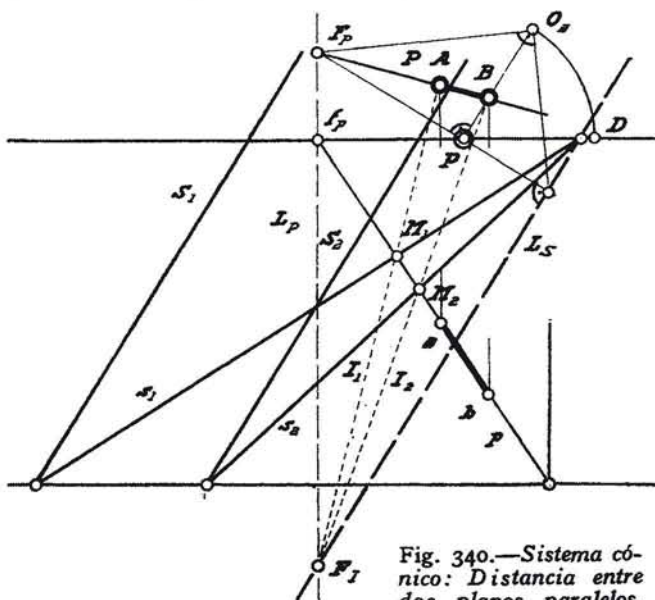


Fig. 340.—Sistema cónico: Distancia entre dos planos paralelos.

MINIMA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Figura 341. La mínima distancia entre dos rectas que se cruzan es la de la longitud del segmento de su perpendicular común comprendido entre ambas. Si las rectas están situadas de tal forma que una de ellas es de punta con respecto a un plano de proyección, en este caso la $r—r'$ al horizontal, en virtud del teorema de las tres perpendiculares, queda determinada inmediatamente la posición de esta perpendicular común, puesto que bastará trazar desde r la perpendicular a s , necesariamente horizontal, por tener que ser perpendicular a $r—r'$.

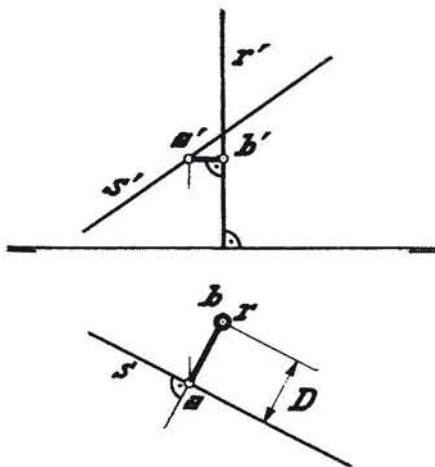


Fig. 341.—Perpendicular común a dos rectas que se cruzan. Determinación de su mínima distancia en magnitud y posición cuando una de ellas es de punta.

La longitud del segmento $\overline{a—b}$, $\overline{a'—b'}$, nos mide la distancia mínima, la cual viene proyectada en su verdadera magnitud sobre el plano horizontal.

En general, la resolución de este problema se hace más laboriosa cuando la posición relativa de las rectas con respecto al sistema de representación es

cualquiera. Entonces habremos de recurrir al procedimiento general que se indica:

Figura 342. Las rectas que se cruzan son R y S . Las operaciones que vamos a efectuar por orden sucesivo, son las siguientes: 1.^a Elegir un punto 1 de la recta S y trazar por él R_1 paralela a R , con lo cual determinamos el plano P paralelo a ambas. 2.^a Por un punto cualquiera 2 de la recta R , se traza la perpendicular p al plano. 3.^a Se halla la intersección de esta perpendicular con el plano, punto 3,

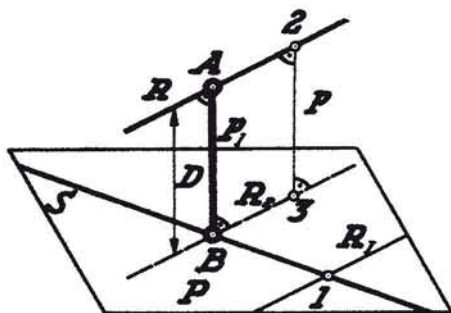


Fig. 342.—Perpendicular común a dos rectas que se cruzan. Caso general.

y por él se traza R_1 paralela a R . 4.^a Esta corta a S en el punto B , desde el cual se traza nuevamente la perpendicular p_1 , que cortará necesariamente a la recta R en el punto A .

El segmento $\overline{A-B}$ es el correspondiente a la mínima distancia D de estas dos rectas.

Observación importante. Recomiendo muy especialmente que en todos los problemas que se tengan que resolver, cualquiera que sea el sistema de representación en que se efectúen las construcciones, se conserven las mismas notaciones que en el problema resuelto previamente en el espacio, a fin de conservar una ordenación lógica de las operaciones y, principalmente de evitar confusiones.

Resolución en el sistema diédrico. (Fig. 343.)

Sean las rectas $r-r'$ y $s-s'$. 1.^o Por el punto $1-1'$ de $s-s'$ se traza la recta $r_1-r'_1$ paralela a $r-r'$. 2.^o Se halla el plano determinado por estas dos rectas, que es el $P-P'_1$, utilizando las trazas h_s y h'_s ,

y h_{R-1} y h'_{R-1} y la $v_s-v'_s$. 3.º Elegido el punto 2—2' de la recta $r-r'$, se traza la perpendicular $p-p'$; su traza con el plano $P-P'$, es el punto 3—3', obtenido éste al utilizar el plano proyectante horizontal

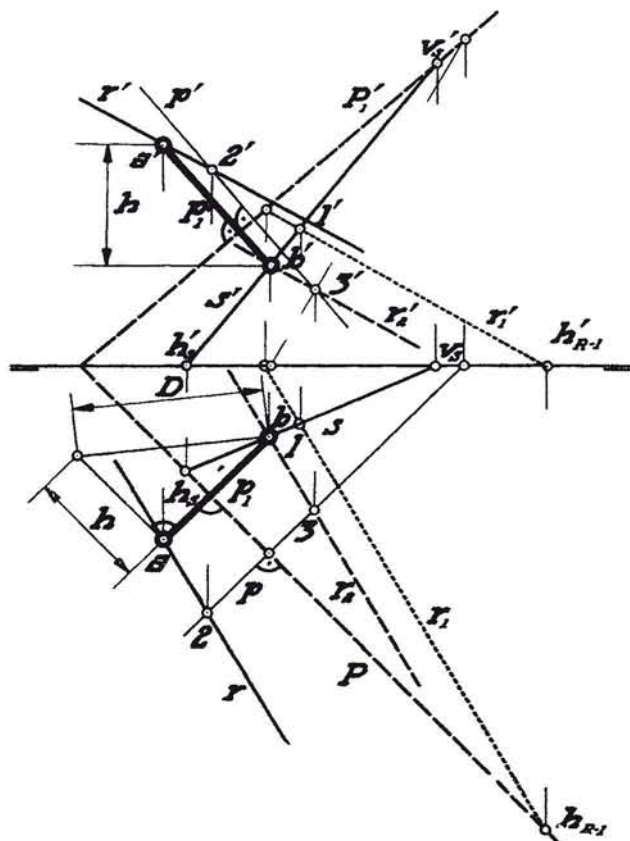


Fig. 343.—Determinación de la mínima distancia entre dos rectas que se cruzan en magnitud y posición.

de $p-p'$. 4.º Por 3—3' se traza $r_2-r'_2$, que corta a $s-s'$ en el punto $b-b'$. 5.º Por el punto $b-b'$ se traza nuevamente la perpendicular al plano $p_1-p'_1$, la cual corta a la recta $r-r'$ en el punto $a-a'$, quedando determinada por D la mínima distancia en magnitud y en posición: $\overline{a-b}$ y $\overline{a'-b'}$.

CAPITULO X

ABATIMIENTOS ⁽¹⁾

*Abatimiento de un punto, de una recta y de un plano en los cuatro sistemas de representación.—
Su aplicación a la resolución de problemas de verdaderas magnitudes lineales y superficiales
e inversos.*

Se dice que un plano se *abate* sobre otro Q cuando se hace coincidir el primero sobre el segundo, haciéndole girar alrededor de su recta de intersección, la cual recibe el nombre de *charnela*. Generalmente se tomará como plano de abatimiento uno de los planos de representación o del dibujo, con lo cual se conseguirá que venga sobre éste y en verdadera magnitud todo lo que contenga el plano abatido.

Será inexacta, por tanto, la expresión de: *abatir un punto* o *una recta*, pues, por definición, **únicamente puede abatirse un plano** sobre otro. En atención a la brevedad y a la facilidad de expresión diremos que *un punto se abate* cuando queda abatido un plano que pase por él, sucediendo lo mismo con la expresión de *abatir una recta*.

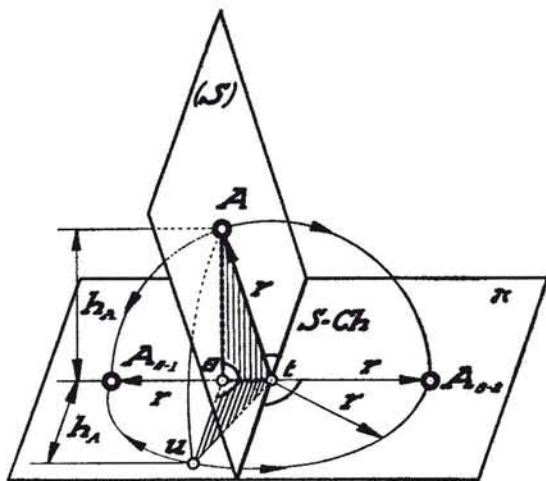


Fig. 344. — Abatimiento de un punto.

Abatimiento de un punto. (Fig. 344.) Supongamos que π es el plano de abatimiento o plano de representación, y que un punto A cuya

(1) Aunque con frecuencia se utiliza para este artificio la palabra *rebatimiento*, he de advertir que esto es un galicismo muy extendido en nuestro país, error en el que he incurrido yo mismo en la redacción del segundo tomo de esta obra a causa de la enseñanza adquirida, motivo por el cual insisto ahora en que se han de utilizar únicamente las palabras *abatir* y *abatimiento*.

proyección ortogonal sobre él es a , va a ser abatido; mejor dicho, se va a abatir el plano (S) que pasa por el punto A tomando como eje de giro su traza S , que también llamaremos Ch , por ser la charnela.

Sabemos que el punto A describe en el espacio una circunferencia cuyo plano es perpendicular a la charnela, siendo su radio r la distancia del punto de referencia a dicho eje de giro y su centro el punto t .

Este artificio del abatimiento va a consistir en determinar las posiciones A_{a-1} y A_{a-2} , que puede ocupar el punto A cuando se abate dicho plano (S) , en función de los elementos determinativos del punto y del plano.

Como el plano de la circunferencia que describe el punto tiene por traza la recta A_{a-1} y A_{a-2} , perpendicular a la charnela, y la proyectante $\overline{A-a}$ es perpendicular también al plano π , resulta que las rectas $\overline{A-t}$ y $\overline{A-a}$ se hallan también en el de la circunferencia ya citada; o lo que es lo mismo, los puntos a y t pertenecen a la traza $\overline{A_{a-1}-A_{a-2}}$.

Conocida, por tanto, la situación de la recta sobre la cual se van a encontrar las posiciones abatidas A_{a-1} y A_{a-2} , nos será preciso, además, conocer el radio de la circunferencia descrita. Este radio es la hipotenusa del triángulo $\overline{A-t-a}$, rectángulo en A , que siempre podremos determinar cuando conozcamos la proyección ortogonal del punto a y su cota $\overline{A-a} = h_a$ sobre el plano del abatimiento. El triángulo de referencia, hecho coincidir con el plano del dibujo, ocupa la posición $\overline{t-a-u}$, y su hipotenusa será el radio r que nos permitirá situar los puntos A_{a-1} y A_{a-2} , pudiéndose establecer la regla general siguiente:

Para obtener el abatimiento de un punto se trazarán desde su proyección ortogonal sobre el plano del abatimiento la perpendicular y la paralela a la charnela; en la paralela se tomará la altura del punto sobre dicho plano de abatimiento para determinar el radio, y haciendo centro en el punto de intersección de la charnela con su perpendicular se obtendrán en ésta las posiciones del punto abatido.

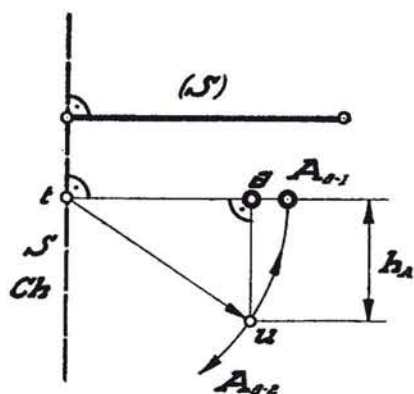


Fig. 345. — Sistema acotado: Abatimiento de un punto.

Resolución en el sistema acotado. (Figura 345.) Sea a el punto y (S) el plano que lo contiene. El plano de abatimiento va a ser el plano del dibujo; por tanto, la traza S será también la charnela Ch , y aplicando la regla anterior, desde a trazaremos la perpendicular y la paralela a la charnela, determinando así los puntos t y u al tomar, a partir de a y sobre la paralela a la charnela, la cota h_a del punto.

Con radio $\overline{t-u}$ conseguiremos en un sentido la posición A_{a-1} , y en el otro A_{a-2} .

Abatimiento de un punto en el sistema diédrico. (Fig. 346.) Sea $a—a'$ un punto y $S—S'$, el plano que lo contiene. El punto $a—a'$ está situado en la horizontal de traza $v—v'$.

Por utilizar el horizontal de proyección como plano de abatimiento, la charnela $Ch—Ch'$ será la traza horizontal del plano S .

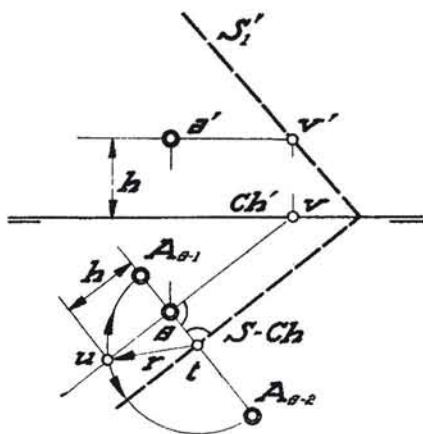


Fig. 346. — Sistema diédrico: Abatimiento de un punto sobre el plano horizontal de proyección.

Apliquemos la regla general trazando desde a la perpendicular y la paralela a la charnela, etc.

Construído el triángulo $a—t—u$ y haciendo centro en t con radio $r = t—u$, obtenemos A_{a-1} y A_{a-2} .

Nota: Es preciso tener muy en cuenta que siendo la charnela una recta como otra cualquiera, ha de tener sus dos proyecciones; es decir, que en este caso será $Ch—Ch'$, confundíndose Ch' con la línea de tierra por ser una recta del plano horizontal.

Figura 347. Si en vez de utilizar el plano horizontal de proyección como plano de abatimiento empleáramos el vertical, la charnela, en este caso, sería $Ch'—Ch$, es decir, la traza vertical $S'—S_1$ del plano.

También en este caso emplearemos la regla general, que consistirá en trazar desde la proyección a' del punto sobre el plano de abatimiento la perpendicular y la paralela a la charnela, etc.; haciendo centro en t y con radio $t—u$ obtenemos las dos posibles soluciones A_{a-1} y A_{a-2} .

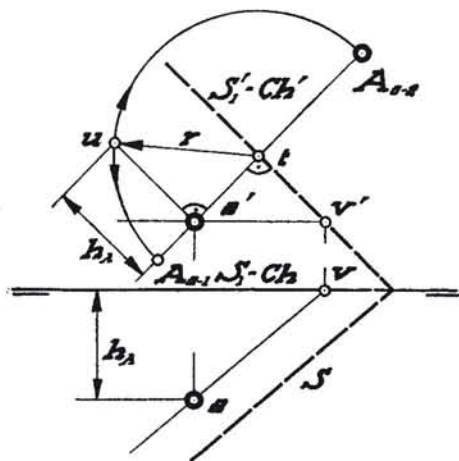


Fig. 347.—Sistema diédrico: Abatimiento de un punto sobre el plano vertical de proyección.

Figura 348. Puede ser útil a veces, y nosotros lo emplearemos, el artificio de tomar como plano de abatimiento no ya uno de los de proyección, sino otro que le sea paralelo, por ejemplo, un horizontal o un vertical, lo cual, aparte de la ventaja que trae consigo el simplificar las construcciones o de darnos puntos situados dentro de los límites del dibujo, tiene la propiedad de que el abatimiento viene proyectado en verdadera magnitud sobre el plano de proyección a que es paralelo, lo que equivale, en definitiva, a haber operado sobre él como plano de abatimiento.

Así, por ejemplo, en el caso de la figura, utilizamos como plano de abatimiento el horizontal H'_1 , y entonces la regla sigue aplicándose;

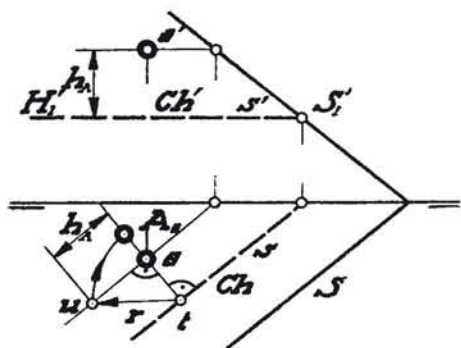


Fig. 348.—Sistema diédrico: Abatimiento de un punto sobre un plano paralelo al horizontal de proyección.

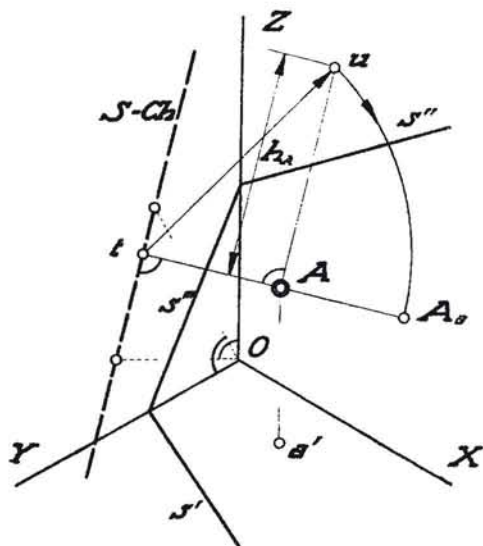


Fig. 349.—Sistema axonométrico: Abatimiento de un punto.

es decir, que la charnela en este caso es la $Ch—Ch'$, pero la altura del punto se medirá desde la proyección vertical a' a la traza vertical H'_1 del plano de abatimiento.

Abatimiento de un punto en el sistema axonométrico. (Fig. 349.). Sea el punto $A—a'$ situado en el plano $s'—s''—s'''$. Siendo el plano de abatimiento el plano π de referencia, la charnela Ch será su traza ordinaria S , por lo que la construcción se efectúa en la misma forma que en los casos conocidos en los otros sistemas, trazando desde la proyección directa en este caso (que es la proyección ortogonal sobre el plano de abatimiento) la perpendicular y la paralela a la charnela, etc.

Para construir el triángulo $A—t—u$ se precisa conocer la distancia del punto al plano de abatimiento, es decir, la distancia del punto al

plano de referencia π . Esta distancia $(A)-A$, como aparece en la figura 350, tendrá que medirse mediante un artificio que detallamos en relación con la figura 351:

Es indudable que conseguiremos el mismo resultado si en vez de hallar la distancia del punto (A) al plano de abatimiento π , medimos la distancia que separa el origen O de un plano (π_1) paralelo a π que pase por el punto (A) . Supongamos trazado dicho plano (π_1) , que al pasar por (A) determina sobre los ejes los puntos (p) , (q) , (m) , que nos proporcionan las trazas de este plano (π_1) : $(\pi'_1) - (\pi''_1) - (\pi'''_1)$.

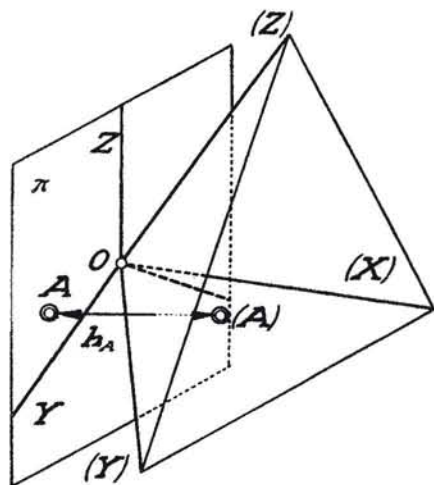


Fig. 350.—Sistema axonométrico: Distancia de un punto al plano de proyección o del abatimiento.

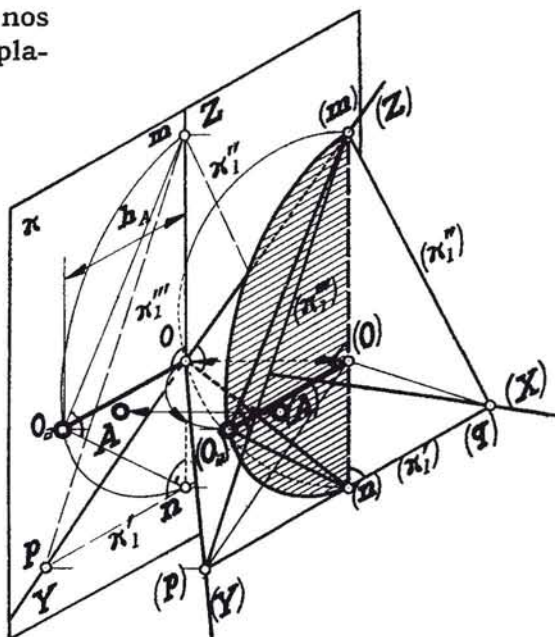


Fig. 351. — Sistema axonométrico: Determinación de la distancia entre el origen y un plano paralelo al del abatimiento.

Habremos formado así un tetraedro cuya altura $O-(O)$ será la distancia del punto origen O al plano (π'_1) .

Si ahora consideramos el plano que pasa por el eje $O-(Z)$ perpendicular a (π'_1) , habremos obtenido un triángulo rectángulo en O : $(m)-O-(n)$, cuya altura es el segmento que tratamos de medir. Si, tomando como charnela el lado $(m)-(n)$, hacemos coincidir el plano del triángulo $(m)-O-(n)$ con (π_1) , obtenemos el punto abatido (O_a) y la distancia $(O_a)-(O)$ será la altura del triángulo abatido $(m)-(O_a)-(n)$. El vértice O_a se hallará en una semicircunferencia de diámetro $(m)-(n)$ y su altura habrá de pasar necesariamente por el punto (O) .

De aquí se deduce el procedimiento para conseguir esta distancia, no ya en el plano (π') , sino en el plano π de representación.

Como todo ello viene proyectado ortogonalmente sobre dicho plano, tendremos proyectadas y en verdadera magnitud las trazas π'_1 , π''_1 y π'''_1 , y asimismo los puntos m y n , que nos permitirán el trazado de la semicircunferencia y, por tanto, el conocimiento del punto O_a ; la distancia $O-O_a$ es h_A , que hacíamos intervenir en la figura 349.

La resolución completa de la obtención de h_A en este sistema axonométrico viene representada en la figura 352, donde se repiten las construcciones con las mismas notaciones de la figura anterior.

Abatimiento de un punto en el sistema cónico. (Fig. 353.) Sea el punto (A) — (a) situado en el plano (S) — (s) .

Como en este sistema no tenemos más que el punto A , proyección directa de (A) , no podemos aplicar la regla general con el solo conocimiento de éste, y debemos obtener previamente su proyección ortogonal A_p sobre el plano del cuadro.

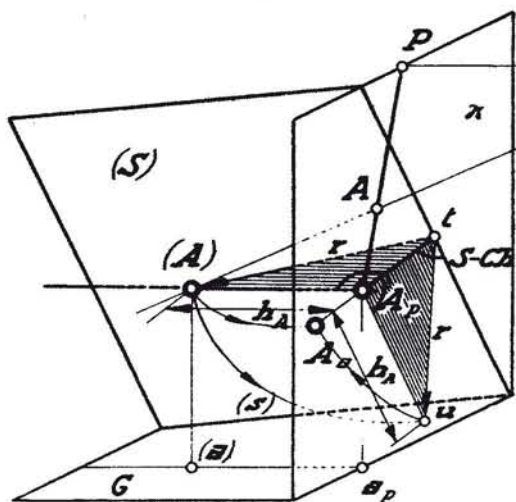


Fig. 353. — Abatimiento de un punto en el sistema cónico.

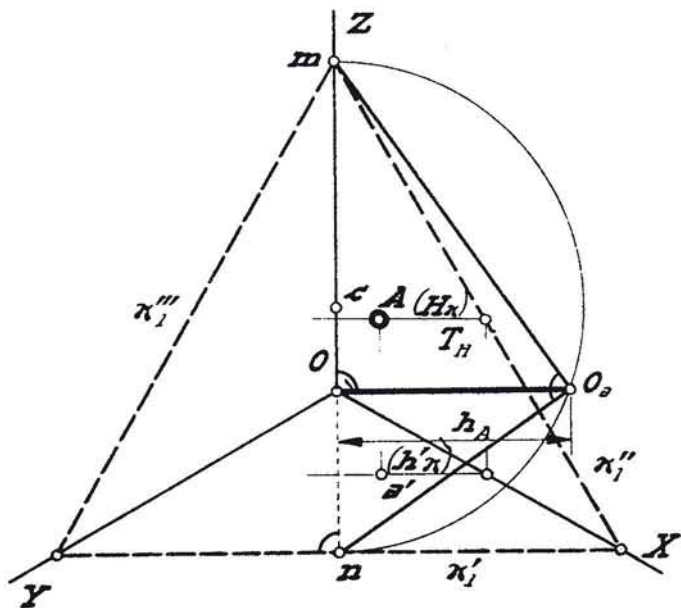


Fig. 352. — Sistema axonométrico: Realización de la obtención de la distancia de un punto al plano del abatimiento.

Para ello habremos de trazar la proyectante $(A)-A_p$, que fugará en el punto P y pasará necesariamente por el punto A .

Ya con el conocimiento de A_p , podremos aplicar la regla ya conocida trazando por ella la perpendicular y la paralela a la charnela, etc. Construyendo el triángulo A_p-t-u , determinaremos el punto abatido A_a .

Realización del abatimiento en el sistema cónico. (Fig. 354.) Sea el sistema que representa la figura y un punto $A—a$ del plano $S—L_s$.

Empezaremos por proyectar ortogonalmente el punto sobre el plano

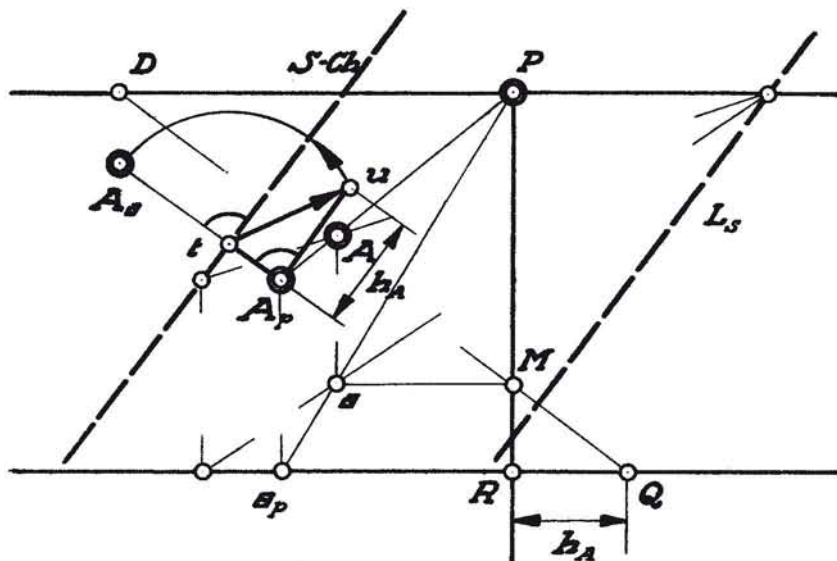


Fig. 354. — Sistema cónico: Realización del abatimiento de un punto.

del cuadro, auxiliándonos de la perpendicular $\overline{P—A}$, $\overline{P—a}$, cuya traza sobre el plano del cuadro será $a_p—A_p$, proyección ortogonal del punto. Por éste, aplicando la regla general, trazaremos la perpendicular y la paralela a la charnela, que en este caso es la traza S del plano. La distancia del punto al plano será la que viene representada por el segmento $\overline{a—a_p}$, cuya verdadera dimensión se determinará aplicando lo explicado con referencia a la figura 316, y viene dada por $\overline{R—Q} = h_A$.

Abatimiento de una recta. (Fig. 355.) La recta tampoco se puede abatir, como ya hemos aclarado. Se entenderá que se abate un plano (S) que la contiene, sobre el de representación π .

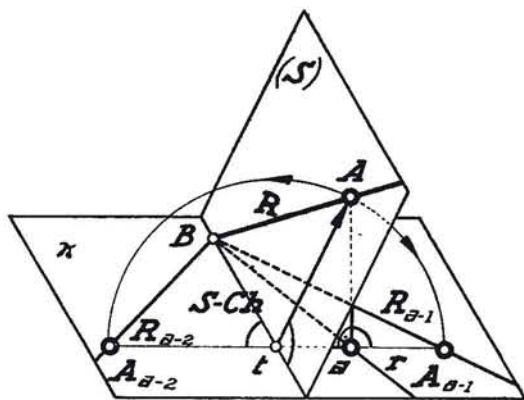


Fig. 355. — Abatimiento de una recta.

Como la recta está integrada por dos puntos, bastará conocer el abatimiento de dos de ellos para así tener el de la recta; pero si tenemos presente que todos los puntos del eje de giro, o sea de la char-

nela, permanecen invariables, la traza B de la recta R con la charnela será punto que pertenecerá a las posiciones abatidas R_{a-1} o R_{a-2} , que se conseguirán conociendo el abatimiento de uno solo de sus puntos A que ocupa las posiciones A_{a-1} o A_{a-2} , según sea el sentido del giro del plano abatido.

Abatimiento de una recta en el sistema acotado. (Fig. 356.) Con lo ya explicado anteriormente, supuesta una recta R representada en este sistema, situada en el plano (S) cuya traza es S , tomando ésta como charnela Ch , al permanecer invariable el punto B de la misma y siendo A_a el abatimiento de A , conseguiremos en R_a el abatimiento de la recta R .

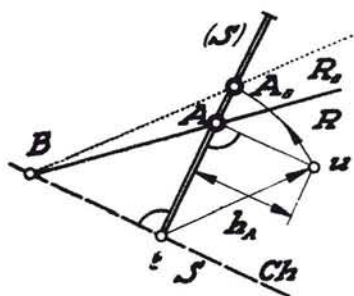


Fig. 356. — Sistema acotado: Abatimiento de una recta.

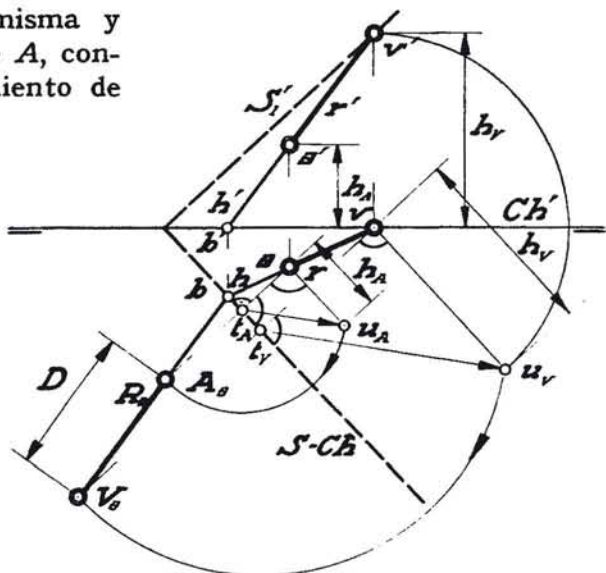


Fig. 357. — Sistema diédrico: Abatimiento de una recta y proyecciones de un segmento dado sobre la misma.

Abatimiento de la recta en el sistema diédrico. (Fig. 357.) La recta es $r-r'$, el plano que la contiene $S-S'$, y el plano de abatimiento el horizontal. Abatido un punto $a-a'$ de la recta obtenemos, según ya se sabe, A_a ; y siendo $b-b'$ el punto invariable de la charnela, al unirlo con el anterior obtenemos la posición R_a de la recta abatida.

Nos será más conveniente, si ello es factible, abatir el punto $v-v'$, traza vertical de la recta, en vez de uno cualquiera $a-a'$, pues con ello conseguimos una simplificación en la forma de llevar la altura h_v del punto sobre el plano de abatimiento, haciendo centro en v con radio $\overline{v-v'}$.

Obsérvese que, hallándose la recta situada sobre el plano de proyección, aparece en su verdadera magnitud y, por tanto, el segmento proyectado $\overline{a-v}$, $\overline{a'-v'}$, tiene una medida real igual a D , correspondiente al segmento abatido $\overline{A_a-V_a}$.

Figuras 358 y 359. Como recta notable de un plano abatido en este sistema, figura la de su otra traza, que no se ha elegido como charnela. Tal es el caso de la figura en cuestión, donde se ha conseguido $(P_1)_a$, abatimiento de $P_1—P'_1$, tomando como charnela $Ch—Ch'$, la otra traza $P—P'$. En este caso, y tal como aparece en la figura 359, el punto que se ha elegido $v—v'$, además del común a la línea de tierra

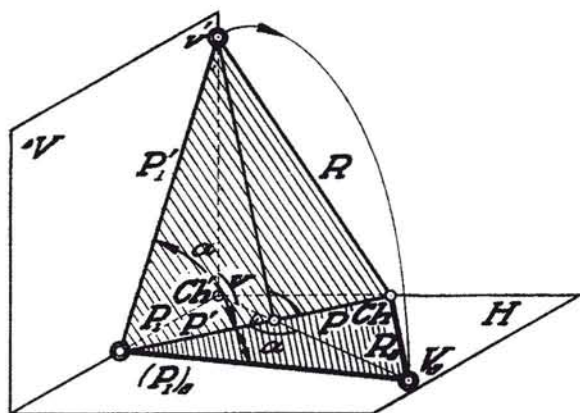


Fig. 358.— Abatimiento de la traza vertical de un plano en el sistema diédrico.

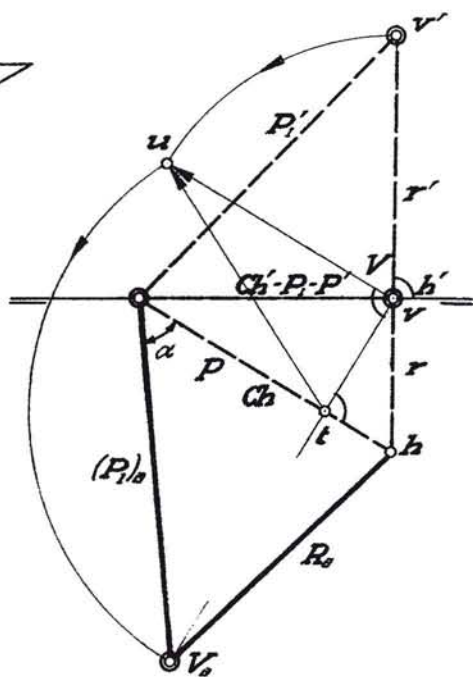


Fig. 359. — Sistema diédrico: Abatimiento de la porción de un plano comprendida en el primer cuadrante.

y a la charnela, nos da V_a y, por tanto, la posición $(P_1)_a$ de la traza vertical abatida. De esta forma se consigue, además, tener la medida angular α del plano en lo que se refiere a su parte comprendida en el cuadrante de proyección, en este caso el primero. Si además el plano estuviere limitado por la recta $R—r—r'$ de perfil, ésta ocuparía una posición ya definida por el punto V_a , es decir, R_a , y entonces el triángulo formado por las tres rectas P , P'_1 , R , se hallaría en verdadera magnitud abatido y coincidente con el plano horizontal.

Abatimiento de la recta en el sistema axonométrico y determinación de un segmento dado. (Fig. 360.) Supongamos que se trata de la recta $R-r'$, la cual se halla contenida en el plano $s'-s''-s'''$. La charnela Ch será necesariamente la traza ordinaria S del plano en cuestión. Resultando doble el punto B , por ser de la charnela, quedará conseguido el problema abatiendo únicamente otro punto de la recta, en este caso $A-a'$, situado en la cara del triedro $X-O-Z$. (Se simplifican las construcciones al elegir este punto.) Como hemos de necesitar la distancia del punto A al plano del abatimiento, es decir, al plano π ,

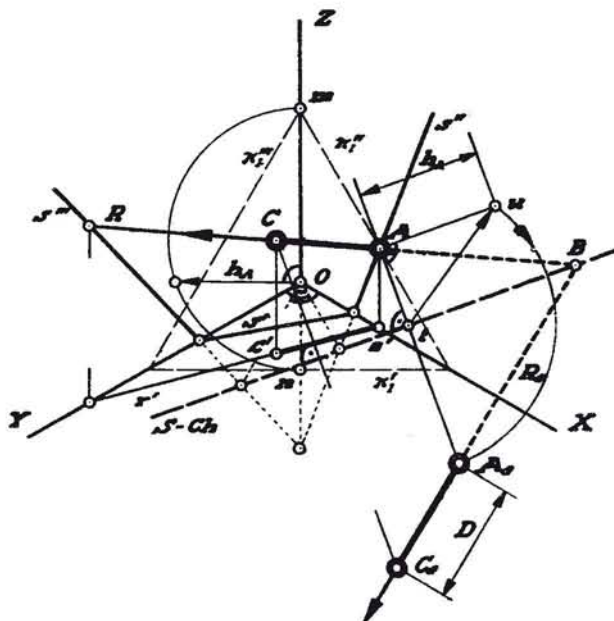


Fig. 360. — Sistema axonométrico: Abatimiento de una recta y obtención de las proyecciones de un segmento conocido sobre la misma.

empezaremos por trazar por el punto en cuestión $A-a'$ el plano π_1 paralelo al de referencia, que nos permitirá conseguir mediante sus trazas $\pi'_1-\pi''_1$ el diámetro $m-n$ y, por tanto, la altura h_A . Obsérvese que por estar situado el punto A en la cara $X-O-Z$ la traza π''_1 pasa por él.

Conocido el punto A_a , obtenemos R_a uniéndolo con B , y a partir de él podemos tomar un segmento de magnitud conocida D que situará en la recta el extremo C_a , el cual, mediante una perpendicular a la charnela Ch , nos conduce a la obtención de su proyección directa C , que limita la del segmento de magnitud dada: $A-C, a'-c'$.

También quedan así resueltos los problemas relacionados con las figuras 308 a 312.

Abatimiento de la recta en el sistema cónico y determinación de un segmento de magnitud dada. (Fig. 361.) La recta dada $R-r$ está situada en el plano $S-L_s$. El punto B corresponde a su traza con el plano del cuadro y también con la charnela; por tanto, será el punto doble; otro punto cualquiera $A-a$ de la recta en cuestión tendrá por abatimiento el punto A_a , obtenido en la forma explicada partiendo de A_p . Siéndonos entonces conocida la posición R_a , podremos delimitar un segmento de longitud D a partir del punto A , cuyo extremo C_a proviene del punto C_p , proyección ortogonal de $C-c$.

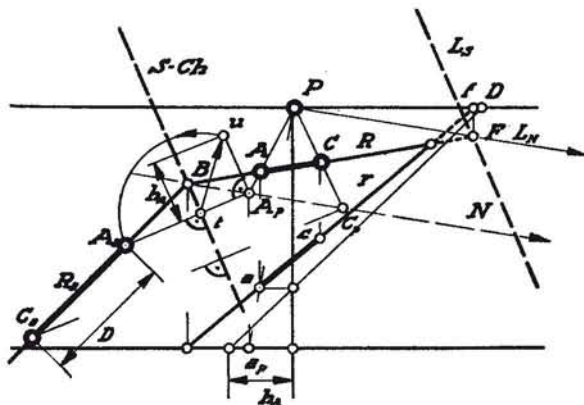


Fig. 361. — Sistema cónico: Abatimiento de una recta y proyecciones de un segmento de longitud conocida sobre la misma.

Es de observar que la recta $\overline{B-A_p-C_p}$ es la proyección ortogonal de la recta (R) sobre el plano del cuadro (por ser la unión de dos de sus puntos proyectados: $B-A_p$).

Este plano proyectante sobre el plano del cuadro de traza $N = (\overline{B-A_p-C_p})$ tiene por recta límite la determinada por el punto principal P y por el punto de fuga F de la recta $R-r$ que contiene. (Véanse figs. 201 y 202, plano perpendicular al del cuadro.)

De esta forma hemos conseguido de una manera sencilla colocar un segmento de magnitud dada sobre una recta, y también, aunque inversamente, hallar la longitud de un segmento representado en este sistema, sin tener que recurrir a las construcciones especificadas en relación con las figuras 317 a 320.

Abatimiento de una forma plana. (Figura 362.) Sea la forma plana $A-B-C-D$, situada en el plano (S) que tratamos de abatir sobre el plano de referencia π . El problema no encierra novedad alguna en sí, puesto que hallando el abatimiento o la posición abatida de cada uno de sus puntos, y uniéndolos ordenadamente, conseguiríamos la finalidad del problema. Pero este procedimiento, a más de ser rutinario y largo, nos puede conducir a errores de exactitud y a cometer faltas tanto de interpretación como de resultado. Por esta razón y otras que más adelante apreciaremos, vamos a utilizar con ventaja una *relación sencilla de afinidad* existente en este artificio:

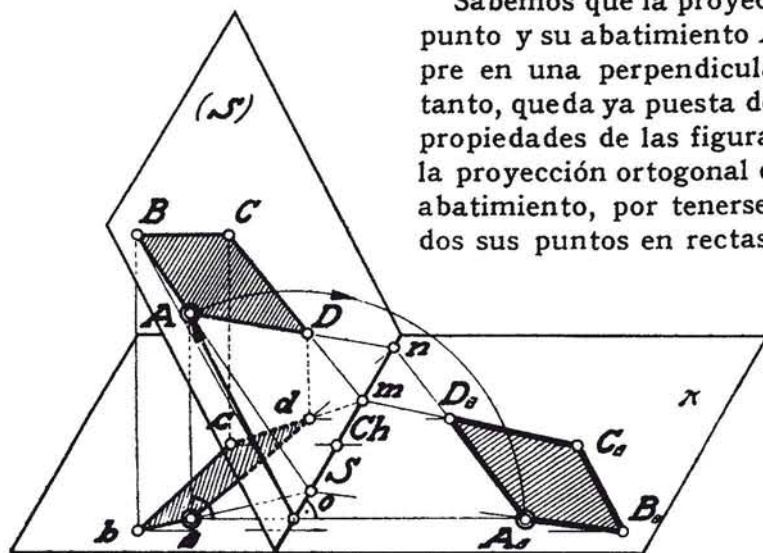


Fig. 362. — Abatimiento de una forma plana.

Sabemos que la proyección ortogonal a de un punto y su abatimiento A_a se encuentran siempre en una perpendicular a la charnela; por tanto, queda ya puesta de manifiesto una de las propiedades de las figuras afines que relaciona la proyección ortogonal de la forma plana y su abatimiento, por tenerse que corresponder todos sus puntos en rectas paralelas, ya que son todas perpendiculares a la misma charnela. Además de esta propiedad, queda también patente el hecho de que las rectas homólogas o afines se cortan en puntos dobles del *eje de afinidad*, que en este caso es la *charnela*.

La demostración de esta segunda propiedad es evidente si nos fijamos en que las rectas del espacio de la forma plana: $C-D$, $A-D$, $B-A$, cortan a la charnela en los puntos m , n , o , respectivamente, puntos que pertenecen a sus proyecciones ortogonales $c-d$, $a-d$, $b-a$, y también a sus posiciones abatidas C_a-D_a , A_a-D_a , B_a-A_a , manifestándose, por tanto, que la *figura proyección* y la *figura abatida* tienen sus rectas homólogas con *puntos dobles en una recta fija*.

Con esto vemos que para obtener el abatimiento de una forma plana, conocida su proyección ortogonal sobre el plano del abatimiento, bastará tener fijada la charnela y la posición de un punto abatido, o sea el eje y un par de puntos afines, para que al quedar así definido el sistema se resuelva un problema sencillo de afinidad que nos proporcione el abatimiento total de la forma en cuestión.

Esta propiedad va a ser utilizada en todos los sistemas de representación, como vamos a detallar a continuación:

Abatimiento de una figura plana en el sistema acotado. (Fig. 363.)
La figura plana es aquí el triángulo $A-B-C$ situado en el plano (S), cuya traza S se utiliza como charnela Ch .

La posición abatida del punto A es A_a . Al quedar definido el sistema por Ch y $A-A_a$, bastará hallar el triángulo $A_a-B_a-C_a$ afín del anterior, para tener así conseguido el abatimiento deseado.

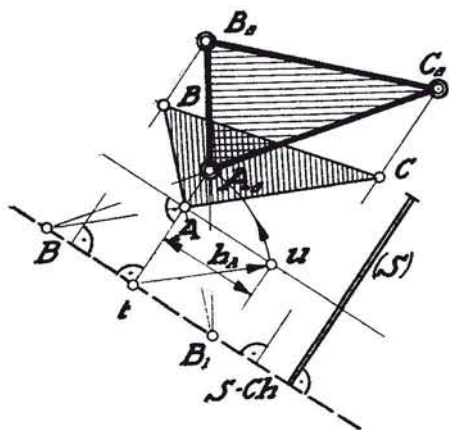


Fig. 363. — Sistema acotado: Abatimiento de una figura plana.

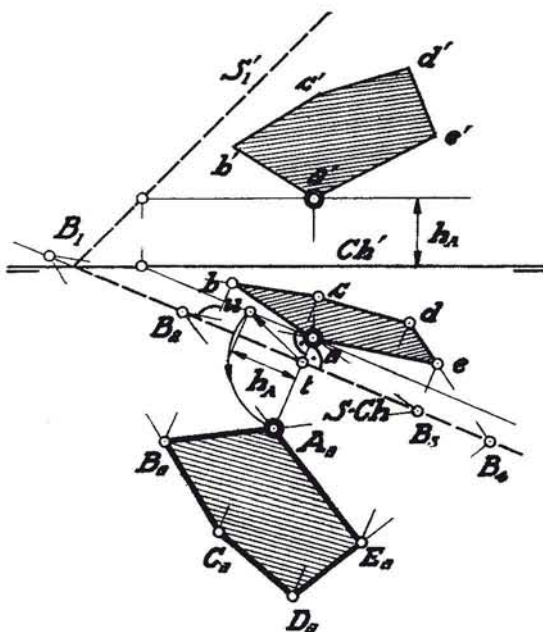


Fig. 364. — Sistema diédrico: Abatimiento de una figura plana.

Abatimiento de una forma plana en el sistema diédrico. (Fig. 364.)
Conocemos un plano $S-S'$, y la proyección horizontal de una forma poligonal que contiene: $a-b-c-d-e$, de la cual no necesitamos su proyección vertical: $a'-b'-c'-d'-e'$.

El abatimiento se consigue hallando la forma afín: $A_a-B_a-C_a-D_a-E_a$ de la ya citada, en un sistema en que el eje de afinidad es la traza $S-Ch-Ch'$ y un par de puntos afines: $a-A_a$. La altura del punto A sobre el plano de referencia o de abatimiento h_A se ha obtenido utilizando la horizontal que pasa por el punto $a-a'$. Como se observa, se han utilizado los puntos dobles del eje B_1, B_2, B_3, B_4 .

Abatimiento de una forma plana en el sistema axonométrico. (Figura 365.) Supongamos que en el plano $s'-s''-s'''$ limitado por la recta R existe una figura F . Se trata de conseguir la verdadera forma de esta figura y de la porción del plano situado en el primer cuadrante limitado por la recta R ya citada. Sabemos que la charnela Ch es la traza ordinaria S del plano (S), y también eje de afinidad, necesitando para determinar el sistema el conocimiento de un par de puntos afines. Con tal motivo elegiremos un punto A de la traza s'' , por sernos más sencilla la determinación de su distancia h_A , como lo hemos podido comprobar en la figura 360. Con el conocimiento del plano $\pi'-\pi''-\pi'''$,

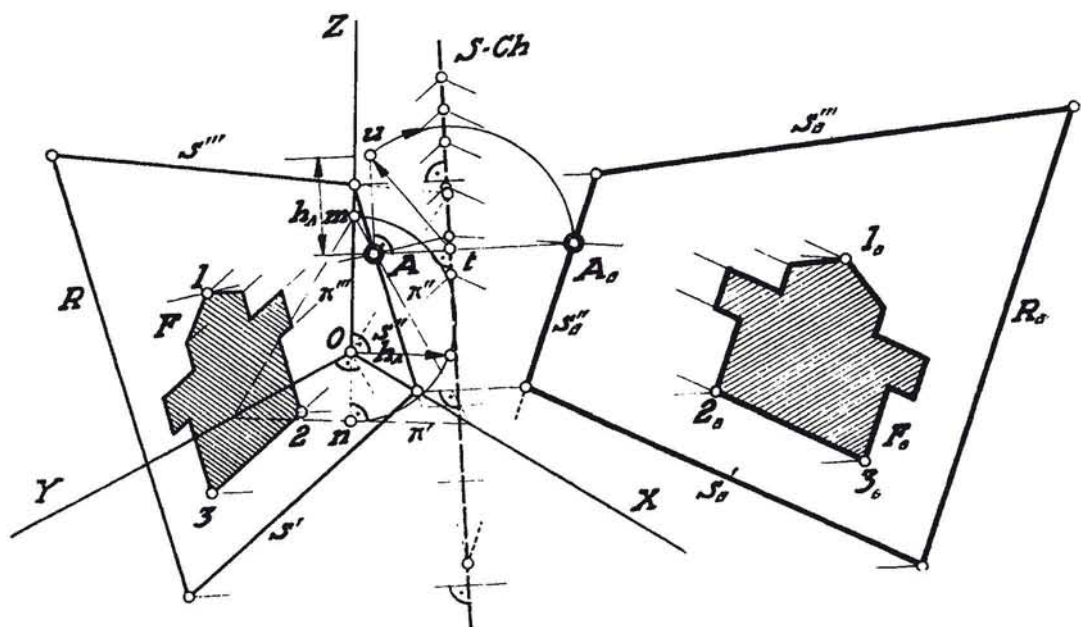


Fig. 365. — Sistema axonométrico: Abatimiento de una figura plana.

paralelo al de referencia, que pasa por el punto A , conseguimos el diámetro $m-n$ y, por tanto, la altura h_A , que llevaremos a partir de A en la forma ya sabida. El triángulo $A-t-u$ nos proporcionará el punto abatido A_a . Conocido el punto A_a , la determinación de la forma F_a nos es ya familiar, por tratarse únicamente de la resolución de un problema de afinidad.

Abatimiento de una forma plana en el sistema cónico. (Fig. 366.) En un plano dado $S-L_S$ existe una forma plana dada por los puntos $A-B-C-D-E-F-G-H$, cuya verdadera forma se trata de conseguir mediante el abatimiento de dicho plano S sobre el plano del cua-

dro. Para ello utilizaremos el procedimiento ya conocido de abatir un punto A mediante su proyección ortogonal $A_p : A_a$. (Véase fig. 354.)

En los casos resueltos en relación con los otros sistemas nos ha bastado el conocimiento del eje de afinidad que es la charnela y de un par de puntos afines; tales serían en este caso A_a y A_p . Pero para esto necesitaríamos conocer las proyecciones ortogonales de todos los puntos que integran la forma del plano S sobre el plano del cuadro, análogamente a lo hecho con el punto A , para, una vez determinada esta figura proyección, relacionarla mediante la afinidad con su abatida. Pero esto, además de ser engorroso de lograr, no nos conduce a un resultado ape-

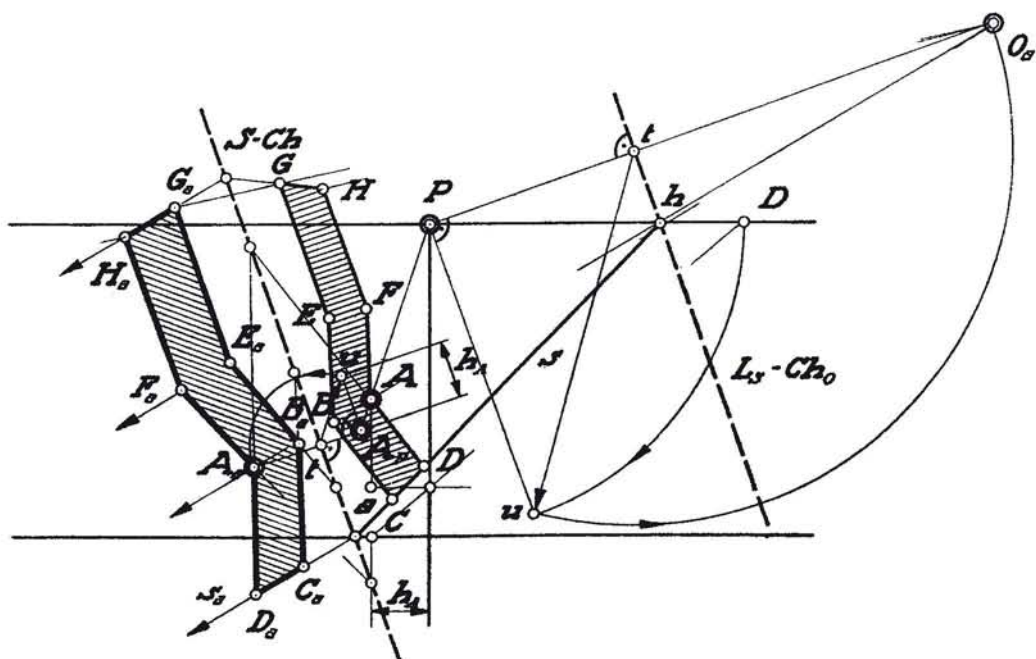


Fig. 366. — Sistema cónico: Abatimiento de una forma plana.

teable, puesto que podemos relacionar directamente la proyección directa de la forma dada y su abatimiento.

Para ello nos basaremos en que si dos figuras son homológicas de una tercera con respecto a un mismo eje, éstas son homológicas entre sí con relación al mismo eje y con un centro de homología que se halla en línea recta con los otros dos. Pues bien: la figura proyección directa del sistema A y la figura proyección ortogonal sobre el plano del cuadro del sistema A_p son homológicas con eje S o Ch y centro de homología P . Por otro lado, la forma proyección A_p y la abatida A_a son afines con eje S y con dirección de afinidad normal a ella. Por ello sabemos cuál ha de ser la nueva dirección del centro de homología O_a : $\overline{P-O_a}$ per-

pendicular a Ch . Como más adelante demostraremos (véase tomo II, página 137), resulta ser O_a el abatimiento del centro de proyección O alrededor de la recta límite L_s .

Resolviendo este problema de homología se consigue el abatimiento en la forma plana deseada.

Como se observa, las rectas $\overline{G-H}$, $\overline{E-F}$, $\overline{D-A}$ y $\overline{C-D}$ son concurrentes en el punto h de la recta límite, por lo que sus homólogas son paralelas a la dirección $\overline{O_a-h}$.

También es preciso hacer resaltar que el abatimiento s_a de la traza horizontal del plano s es también paralela a $\overline{O_a-h}$.

PROBLEMA INVERSO

Obtención de las proyecciones de una forma plana conocida. Como ejemplo de las posibilidades del abatimiento, y por intervenir con frecuencia la circunferencia en las figuras geométricas, vamos a resolver el problema de hallar sus proyecciones cuando conozcamos el plano que la contiene, su centro y su radio.

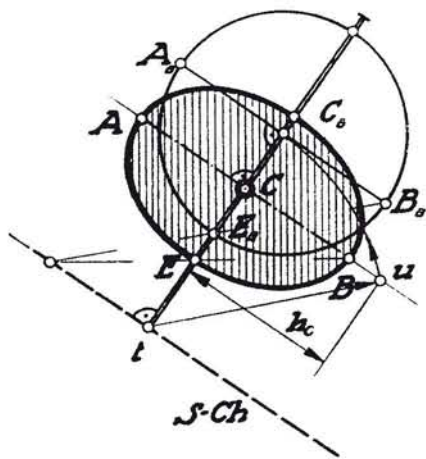


Fig. 367. — Sistema acotado: Proyección de un círculo.

En el sistema acotado, dado un punto C en un plano (S) , centro de un círculo de radio también dado, se pide la proyección de este círculo. (Fig. 367.)

Como ya se ha indicado en el capítulo I, bastará llegar a conocer los ejes de la elipse proyección para que quede terminado el problema, y esto se logra con gran facilidad auxiliándonos del abatimiento, pues una vez abatido el plano, tomando por charnela Ch su traza S , dibujamos el círculo de radio dado; el afín de éste en el sistema representado nos propor-

cionará directamente los elementos necesarios para la representación del círculo.

Así, por ejemplo, el diámetro $\overline{A_a-B_a}$, por ser paralelo al eje de afinidad, será también paralelo e igual a $\overline{A-B}$; es decir, será el eje mayor de la elipse proyección.

La determinación del extremo del eje menor E se consigue muy sencillamente uniendo los dos puntos de la misma figura $\overline{B_a-E_a}$ y hallando, por tanto, el afín E de este punto E_a .

Sistema diédrico. (Fig. 368.) *Proyección de un círculo de centro conocido situado en un plano dado, colocado de tal manera que sea tangente al plano vertical.*

Sean el plano $S-S'_1$ y $c-c'$ el centro del círculo.

Por un abatimiento sobre el plano horizontal, es decir, tomando como charnela Ch la traza S , conseguimos el abatimiento C_a del cen-

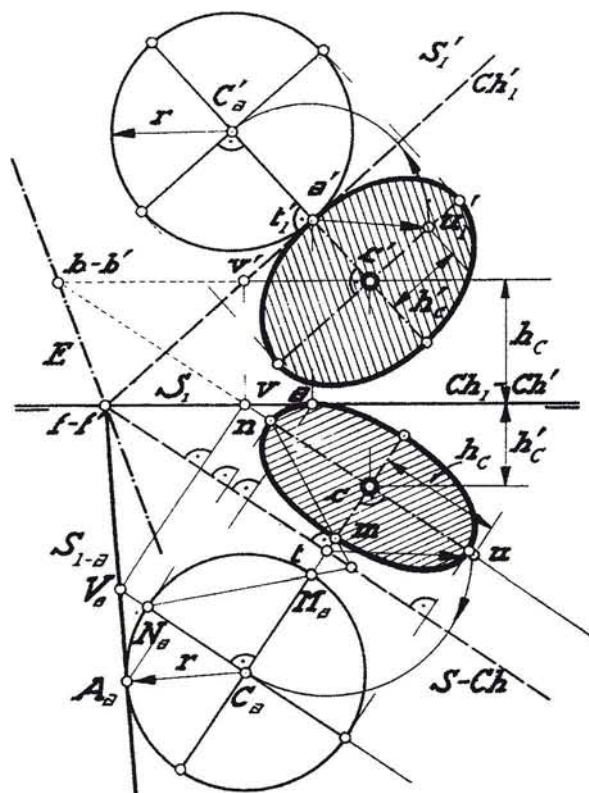


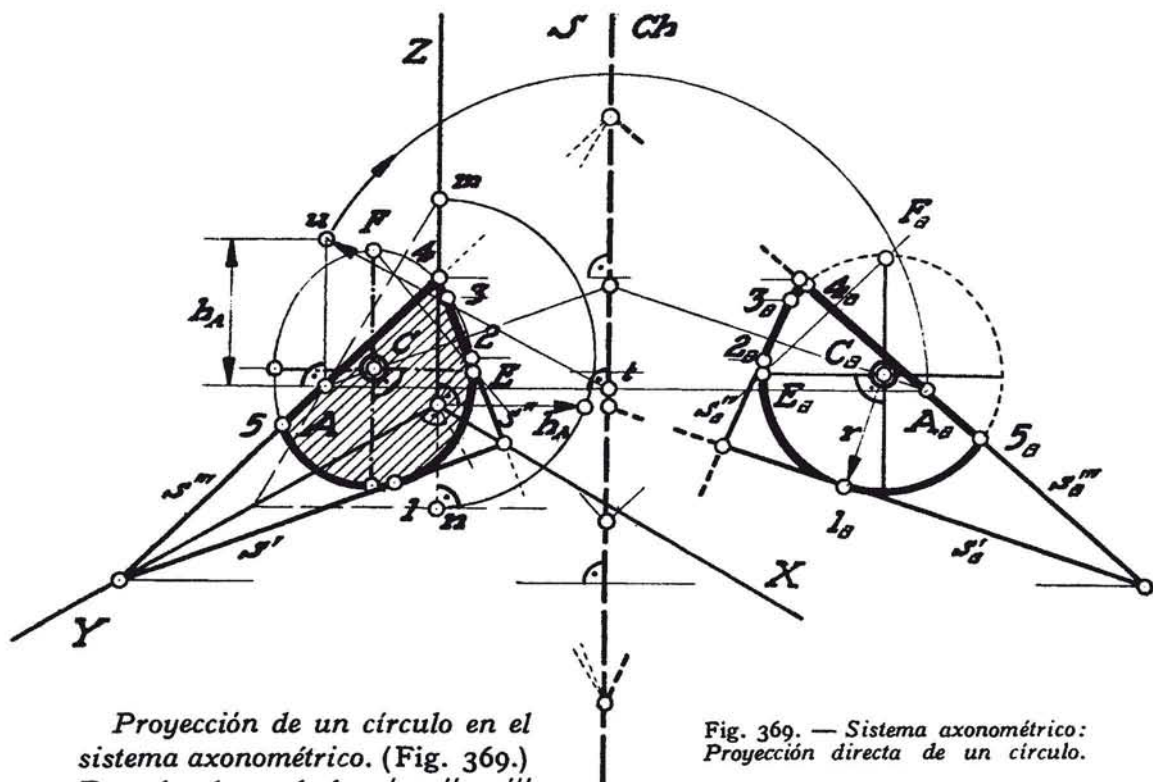
Fig. 368. — Sistema diédrico: Proyecciones de un círculo.

tro y el abatimiento de la traza vertical S_{1-a} a la cual trazaremos la circunferencia tangente en A_a .

Resolviendo la afinidad correspondiente a este abatimiento conseguimos los ejes de la elipse, que al ser trazada deberá resultar tangente a la línea de tierra en el punto a , proyección horizontal del a' correspondiente al punto exigido de tangencia con el plano vertical, es decir, a la traza S'_1 .

La proyección vertical de la circunferencia se podría conseguir mediante la afinidad utilizada en relación con la figura 135, tomando como eje la recta E de intersección del plano $S-S'_1$ con el segundo plano bisec-

tor, siendo la dirección de afinidad la perpendicular a la línea de tierra; pero será más cómodo, en general, utilizar nuevamente la afinidad existente entre la proyección vertical pedida y el abatimiento del círculo sobre el plano vertical, tomando como charnela la traza vertical del plano S'_1 : $Ch_1—Ch'_1$.



Proyección de un círculo en el sistema axonométrico. (Fig. 369.)

Fig. 369. — Sistema axonométrico: Proyección directa de un círculo.

En el plano dado $s'—s''—s'''$

existe un círculo de centro C que es tangente a la traza s' .

El problema va a consistir en representar la parte de círculo situada en el primer cuadrante. Para ello elegiremos la traza ordinaria S del plano como charnela Ch , y obtendremos el abatimiento del plano sobre el del dibujo, para lo cual resolveremos el problema de afinidad que se plantea en el sistema determinado por: eje de afinidad, la charnela $S—Ch$ y un par de puntos afines $A—A_a$.

Se ha tomado el punto A en vez del C por ser más sencilla su obtención abatida, por tratarse de un punto de la traza s''' , pues como ya hemos visto en casos anteriores análogos, se obtiene muy sencillamente el plano paralelo a π que pasa por el punto en cuestión A . Este nos determina el diámetro $m—n$, que nos dará origen a la altura h_A del punto elegido sobre el plano de referencia.

Con el triángulo ya conocido $A—t—u$ obtenemos A_a , y con él la traza abatida s'''_a que lo contiene.

Con el auxilio de la recta $\overline{A-C}$ obtenemos el punto C_a , abatimiento del centro, y con el radio r trazamos el círculo en el plano del abatimiento tangente a la traza abatida s'_a .

Este círculo estará limitado por las trazas, o sea por los puntos $1_a, 2_a, 3_a, 4_a, 5_a$, que corresponden en la proyección directa del sistema a los 1, 2, 3, 4, 5, respectivamente.

La elipse proyección de la circunferencia tendrá como semieje mayor $\overline{F-C}$, afín del radio paralelo al eje $\overline{F_a-C_a}$, y como semieje menor el que se determina mediante el punto E , cuyo abatido es E_a , perpendicular al eje Ch , y que se consigue con la recta $\overline{F-E}$, afín de la $\overline{F_a-E_a}$.

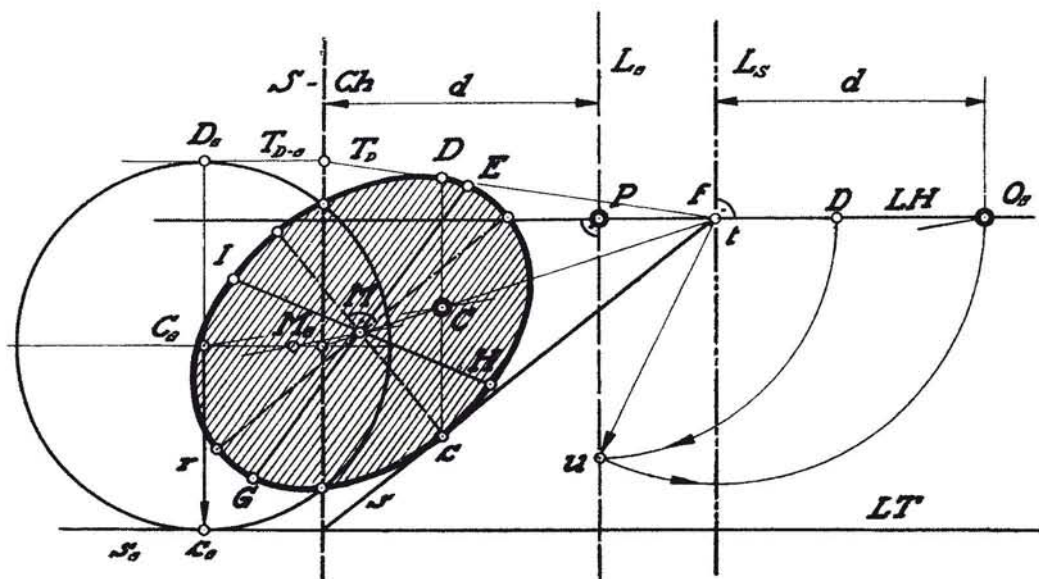


Fig. 370. — Sistema cónico: Proyección de un círculo.

Proyección de la circunferencia en el sistema cónico. (Fig. 370.) En el plano $S-L_s$ existe una circunferencia de centro $C-c$, la cual ha de tener por condición el ser tangente a la traza horizontal s del plano.

Según hemos visto en relación con la figura 366, el abatimiento del círculo sobre el plano del cuadro y su proyección directa son homológicos en un sistema definido por: 1.º, la traza S como eje de homología, que también es la charnela Ch ; 2.º, recta límite del sistema proyección, la del plano: L_s , y 3.º, centro de homología, el abatimiento del centro de proyección sobre el plano del cuadro, tomando como charnela la anterior recta límite L_s .

Por ello, lo primero que hacemos es determinar el centro de homología O_a , abatiéndolo como ya hemos dicho y auxiliándonos del triángulo conocido $\overline{P-t-u}$. De esta forma conocemos la distancia d del

centro de homología a una recta límite, y nos permitirá esto conseguir la otra recta límite L_a , que lo será del sistema abatimiento.

Nota: Es una coincidencia el que la recta límite L_a pase por el punto principal P del sistema.

Volviendo a la resolución del problema, solamente haremos aplicación de un problema de homología sencillo, tal y como se halla explicado en lo referente a la figura 12.

En este caso particular se ha determinado el centro M de la elipse proyección como homológico del punto M_a , polo de la recta L_a con respecto a la circunferencia C_a abatida sobre el plano del cuadro, la cual se ha trazado tangente a la recta s_a , abatimiento de s , traza del plano. Por ser el plano dado perpendicular al geometral, vendrá s_a sobre la línea de tierra, lo que también se comprueba, puesto que su punto impropio f unido con el centro de homología O_a nos da la dirección de la línea de tierra.

Con los diámetros conjugados $E-G$ y $H-I$ se han conseguido los ejes de la elipse, que nos han permitido su trazado. También es una coincidencia el que el extremo del eje menor coincida con el de contacto c .

APLICACION DEL ABATIMIENTO A LA MEDICION DE ANGULOS

Primer caso. Angulos de dos rectas. (Fig. 371.) Sean dos rectas R_1-R_2 que se cortan en el punto A . Se trata de conseguir la verdadera dimensión del ángulo α que forman entre sí.

El procedimiento más sencillo va a consistir en hacer coincidir, por abatimiento, el plano determinado por las rectas citadas con el plano de referencia, tomando como charnela Ch la traza de este plano con el anteriormente citado. Esta traza se consigue uniendo entre sí los puntos trazas de las rectas dadas con el plano de proyección.

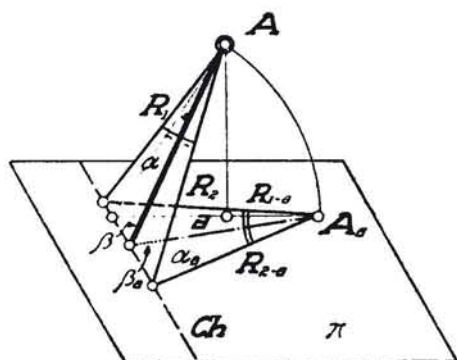


Fig. 371. — *Angulo de dos rectas y su bisectriz.*

Conocido el punto a , proyección del vértice del ángulo, bastará obtener su abatimiento A_a para que, en unión de los puntos fijos de Ch correspondientes a las R_1 y R_2 , consigamos el abatimiento de éstas en R_{1-a} y R_{2-a} , que nos medirán el ángulo abatido α_a .

Con esta construcción podemos, de una manera muy sencilla, obtener la posición en el espacio de la bisectriz β del ángulo de las rectas en cuestión, hallando previamente la bisectriz β_a del ángulo abatido α_a .

Angulo de dos rectas en el sistema acotado. (Fig. 372.) Repitiendo, y con la misma notación de la figura anterior, la construcción que se indica, hallamos el ángulo α de las rectas dadas $R_1—R_2$ utilizando el abatimiento A_a de su vértice A , y esto nos permitirá, mediante la bisectriz β_a del ángulo ya citado α , obtener la proyección β de la bisectriz del formado por las rectas $R_1—R_2$.

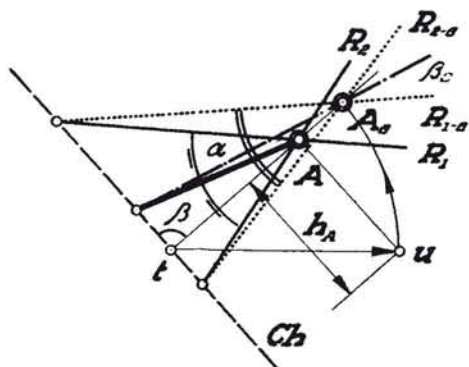


Fig. 372. — Sistema acotado: Obtención del ángulo de dos rectas y trazado de su bisectriz.

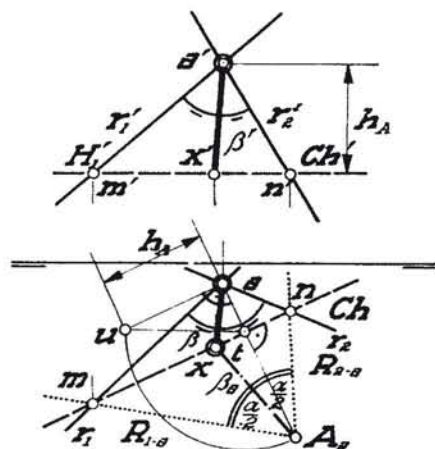


Fig. 373. — Sistema diédrico: Angulo de dos rectas y su bisectriz.

Angulo de dos rectas en el sistema diédrico y su bisectriz. (Figura 373.) Las rectas dadas son $r_1—r'_1$ y $r_2—r'_2$, que se cortan en el punto $a—a'$.

En vez de utilizar el plano horizontal de proyección como plano de abatimiento, tomaremos, en este caso, el plano horizontal H'_1 , siendo entonces la charnela $Ch—Ch'$ la recta horizontal, que se obtiene de una manera directa mediante los puntos $m—m'$ y $n—n'$ en que son cortadas las rectas R_1 y R_2 , respectivamente.

Abatido el punto $a—a'$ en A_a , conseguimos los abatimientos de las rectas R_{1-a} y R_{2-a} , los cuales pasan por los puntos m y n , como ya sabemos, y nos miden el ángulo α , cuya bisectriz β_a corta a la charnela en el punto x , que se llevará en $ch': x'$. La unión de los puntos $x—a$ y $x'—a'$ nos da las proyecciones de la bisectriz deseada: $\beta—\beta'$.

Angulo y bisectriz de dos rectas en el sistema axonométrico. (Figura 374.) Las rectas dadas son R_1 y R_2 , de las que se tienen las proyecciones r'_1 y r'_2 sobre la cara $X-O-Y$. Hallaremos el plano que determinan $s'-s''-s'''$, y conseguiremos su traza ordinaria S ,

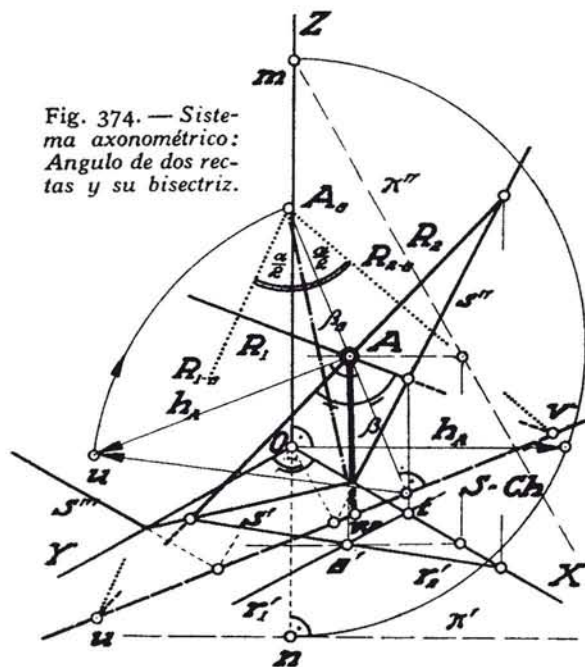


Fig. 374. — Sistema axonométrico: Angulo de dos rectas y su bisectriz.

que tomaremos como charnela Ch . El punto $A-a'$, común a las dos rectas y vértice del ángulo, se abate alrededor de la charnela Ch , hallando para ello, previamente, la altura h_A mediante el plano $\pi'-\pi''$ paralelo al de referencia y que pasa por el punto $A-a'$; es decir, determinando como en los casos anteriores el segmento $m-n$. Conocido el punto A_a , y siendo fijos los $u-v$ de la charnela, conseguimos la medida del ángulo α , cuya bisectriz β_a corta a la charnela en el punto w . Unido éste con A , nos proporciona la proyección directa β de la bisectriz pedida.

Angulo de dos rectas y bisectriz en el sistema cónico. (Fig. 375.) Las rectas dadas son R_1-R_2 , cuyas proyecciones horizontales son r'_1 y r'_2 . El plano que las contiene es el $S-L_S$.

Emplearemos la homología para conseguir el abatimiento de este plano sobre el del cuadro, para lo cual previamente hallaremos el punto O_a , abatimiento del centro de este sistema alrededor de la recta límite L_S como charnela y mediante el triángulo conocido $P-t-u$.

La recta homóloga de R_1 es R_{2-a} , sobre la cual se sitúa el vértice abatido A_a , con lo cual conseguimos, como hemos hecho en los casos anteriores, la bisectriz β , homóloga de β_a .

Como comprobación, la traza u de esta bisectriz $\beta-\beta'$ será un punto de la traza horizontal s del plano.

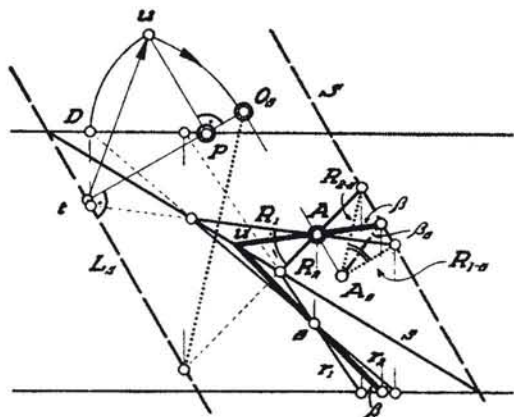


Fig. 375. — Sistema cónico: Angulo de dos rectas y su bisectriz.

ÁNGULO DE UNA RECTA CON UN PLANO

Figura 376. El ángulo de una recta R con un plano S es el que forma la recta en cuestión con su proyección ortogonal J sobre dicho plano, para lo cual habrán de efectuarse las operaciones siguientes:

Elegir un punto B de la recta. Trazar la perpendicular K al plano y hallar su intersección C con S . Unir este punto C con el de intersección A de la recta R con el plano y, finalmente, medir el ángulo de estas dos rectas.

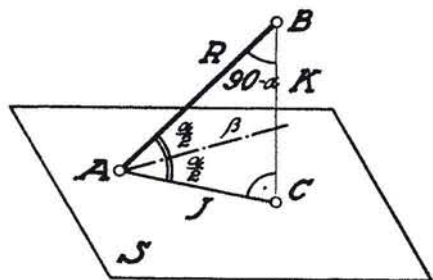


Fig. 376. — Ángulo de recta y plano: Bisectriz del mismo.

Si solamente se deseara conocer el ángulo α que formara la recta con el plano, se podrían simplificar las construcciones, pues teniendo presente que el triángulo $A-B-C$ es rectángulo en C , el ángulo en B es complementario del pedido. Por tanto, bastará medir éste para obtener el que se desea: α .

Pero si se tratara de trazar la bisectriz del ángulo, tendríamos que recurrir al procedimiento indicado al principio.

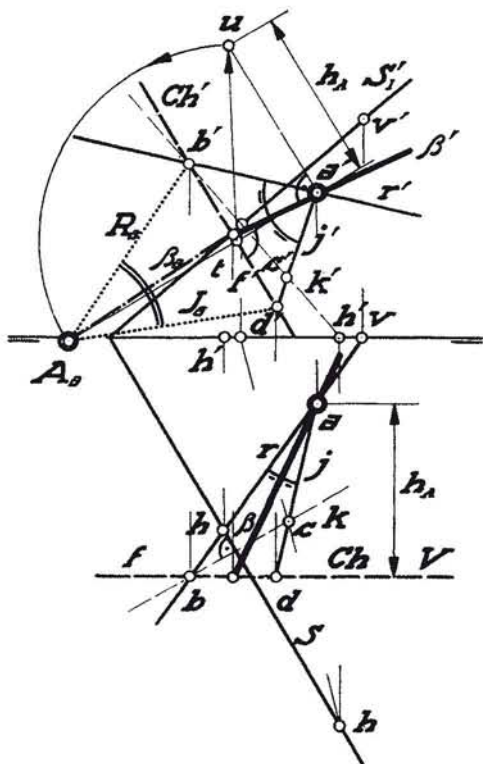


Fig. 377. — Sistema diédrico: Bisectriz del ángulo formado por una recta y un plano.

Resolución en el sistema diédrico. (Fig. 377.) La recta es $r-r'$ y el plano, $S-S'_1$:

1.º Empezaremos por determinar el punto $a-a'$, traza de la recta con el plano, para lo cual nos hemos auxiliado del proyectante horizontal de la misma.

2.º Hemos elegido el punto $b-b'$ sobre la recta y hemos trazado la perpendicular $k-k'$, cuyo punto de intersección con el plano es el $c-c'$, obtenido, éste, tomando su plano proyectante vertical.

Unidos los puntos $a-c$, $a'-c'$, logramos la proyección de la recta $j-j'$, proyección ortogonal de r sobre el plano S .

Bastará hallar el ángulo que forman estas dos rectas, es decir, J y R , para poder conseguir su bisectriz. Este problema ha sido resuelto en ocasión de la figura 373, y en este caso hemos tomado como plano de abatimiento el V , paralelo al vertical de proyección, siendo, por tanto,

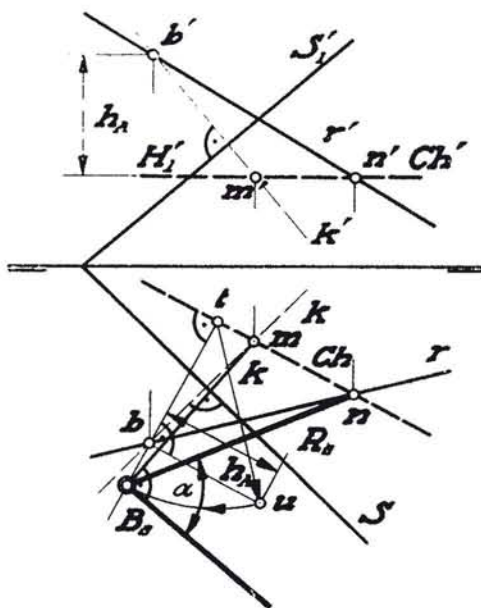


Fig. 378. — Sistema diédrico: Medición del ángulo de una recta con un plano.

la charnela $Ch-Ch'$ la frontal del mismo $f-f'$, que se consigue conociendo los puntos $b-b'$ (tomado de propio intento) y $d-d'$.

Para que se aprecie la simplificación que resulta si solamente deseamos la medida del ángulo de la recta con el plano, tengamos a la vista la figura 378, donde la recta $r-r'$ interviene en relación con el plano $S-S'$.

Se ha elegido un punto $b-b'$ de la recta y se ha trazado la perpendicular $k-k'$. El ángulo de estas dos rectas se obtiene al utilizar como plano de abatimiento el H' , y como charnela $Ch-Ch'$, la horizontal determinada por los puntos $m-m'$, $n-n'$. Mediante el abatimiento B_s del punto $b-b'$, la medida del ángulo que forma la recta con el plano es el complementario α .

Bisectriz del ángulo de una recta con un plano en el sistema cónico. (Figura 379.) La recta dada es $R-r$ y el plano $S-L_s$.

Efectuaremos las mismas operaciones que las indicadas en la figura del espacio 376.

El punto $A-a$ es el de intersección de la recta dada con el plano en cuestión, y se ha conseguido utilizando su plano proyectante horizontal, que nos proporciona la intersección I_1 integrada por los puntos: M_1 , común a las rectas límites L_s y $L-(F_R-f_r)$, y el N_1 , intersección de las trazas horizontales s y r .

Elegido un punto $B-b$, se traza la perpendicular $K-k$, la cual fuga en el punto F_K-f_k , obtenido esto, según sabemos, por la figura 302. El punto $C-c$ es el de intersección de la perpendicular $K-k$ con el plano dado, y proviene de la intersección I_2 , recta común al plano $S-L_s$ dado y al proyectante horizontal de K mediante los puntos: M_2 , encuentro de las rectas L_s y F_K-f_k , y N_2 , común a las trazas horizontales s y k .

El ángulo que se trata de medir ahora es el de las rectas: R dada y $J-j$ ($A-C$, $a-c$). Estas dos rectas de-

terminan un plano $Q-L_Q$, teniendo presente que esta última ha de pasar por F_R , punto de fuga de la recta R que contiene dicho plano Q .

El abatimiento del plano Q sobre el del cuadro nos proporcionará una figura homóloga en un sistema en que el eje de homología sea la traza Q , la recta límite del sistema proyección L_Q y el centro de homología O_a , abatimiento del de proyección con charnela: la recta límite L_Q . Teniendo presente también la definición de punto de fuga y su determinación, es indudable que las rectas O_a-F_R y O_a-F_J serán rectas paralelas a las que tratamos: R y J .

El ángulo de tales rectas $(R)_a-(J)_a$ será el α que forman las rectas en el espacio, y la bisectriz de este ángulo $(\beta)_a$ tendrá por punto de fuga el $F_\beta-f_\beta$, que unido con A , nos determina la posición de las proyecciones $\beta-C$, bisectriz exigida.

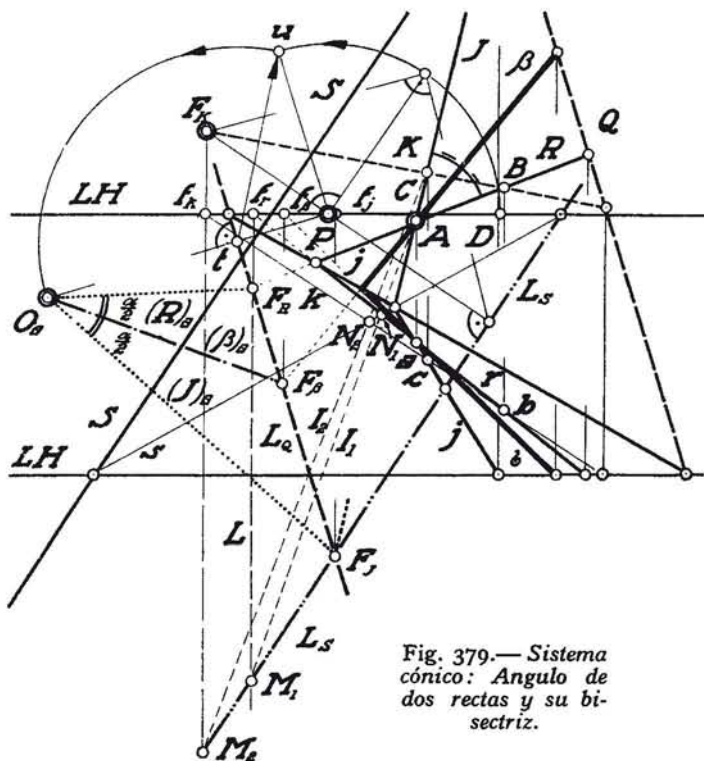


Fig. 379.— Sistema cónico: Ángulo de dos rectas y su bisectriz.

ANGULO DE DOS PLANOS Y PLANO BISECTOR DE AMBOS

Figura 380. Sean los dos planos P y Q , cuyo ángulo tratamos de hallar. Este será medido por el rectilíneo correspondiente, producido por un plano perpendicular S a su intersección I ; es decir, el ángulo formado por las intersecciones p y q que producen los P y Q sobre el S .

La manera de conseguir el plano bisector B consistirá en hallar el plano formado por la intersección ya mencionada I y por la bisectriz b del ángulo $p-q$.

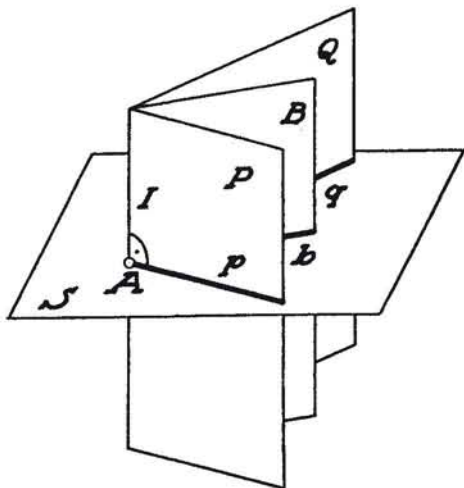


Fig. 380. — Ángulo diedro y trazado de su plano bisector.

Resolución en el sistema diédrico. (Fig. 381.) Sean $P-P'$, y $Q-Q'$, los planos cuyos bisectores se trata de conseguir. Empezaremos por hallar la intersección de estos planos, que es la recta $i-i'$. Trazaremos un plano perpendicular a ella: $S-S'$. Este plano

corta a la recta de intersección $i-i'$ en el punto $a-a'$, vértice del ángulo rectilíneo que tratamos de medir. (Este punto $a-a'$ se ha conseguido utilizando el plano proyectante horizontal de la intersección.)

Con este punto se determinan las rectas p y q , proyecciones horizontales de las trazas de los planos dados con el $S-S'$, para lo cual nos bastan los puntos comunes $m-n$ de la traza S con P y Q , respectivamente. (No nos son necesarias p' y q' .)

Tomando ahora como charnela $Ch-Ch'$, traza horizontal del plano S , obtenemos el punto A_a abatido y, por tanto, los lados del ángulo p_a y q_a , cuya bisectriz β_a corta a la charnela en el punto x . Teniendo presente que el plano bisector contiene a la intersección $i-i'$, estará determinada su

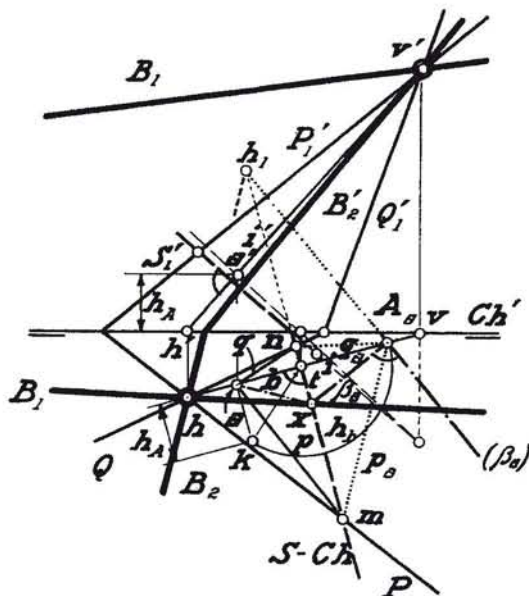


Fig. 381. — Medición del ángulo de dos planos cualesquiera y trazado de sus bisectores.

traza B_1 al unir los puntos $\overline{h-x}$, y su traza vertical B'_1 , uniendo el punto donde B_1 corta a la línea de tierra con la traza vertical $v-v'$ de la intersección $i-i'$ ya citada.

De la misma manera conseguimos la otra solución, o sea el otro plano bisector, con el auxilio de la bisectriz (β_a), cuya traza horizontal es el punto h_1 , que unido con h , define su traza horizontal B_2 , cuya traza vertical B'_2 pasa también por v' .

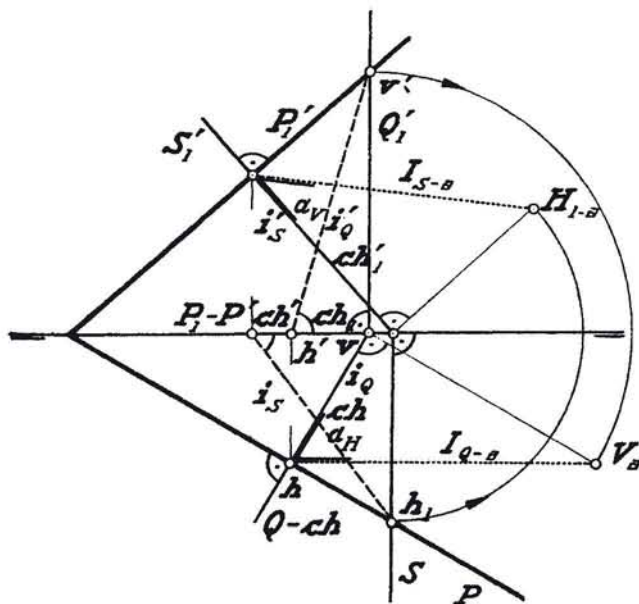


Fig. 382. — Medición de los ángulos que forman un plano cualquiera con los de proyección.

Ángulo que forma un plano cualquiera con los de proyección en el sistema diédrico. (Fig. 382.) Este sencillo problema se utilizará con frecuencia, motivo por el cual queda aquí expuesto.

Sea el plano $P-P_1$. El ángulo que forma con el plano horizontal estará medido por el rectilíneo producido en un plano perpendicular a la intersección, que por ser su traza horizontal $P-P_1$, será un plano tal que el $Q-Q_1$, perpendicular al plano horizontal. La intersección de ambos planos es la recta $i_Q-i'_Q$, la cual, abatida sobre el plano horizontal tomando como charnela la traza Q , viene en I_{Q-a} obtenida mediante el abatimiento de su punto traza vertical $v-v'$, es decir, V_a .

El ángulo $Q-I_{Q-a}$ nos mide α_H .

Repetiendo la misma construcción, pero utilizando ahora el plano $S-S_1$, perpendicular a la traza vertical $P_1-P'_1$ del plano, conseguimos el ángulo α_V mediante el abatimiento de la intersección I_{S-a} .

Cuando únicamente se precisa el conocimiento del ángulo que forman dos planos en el espacio P y Q (fig. 383), se simplificará notablemente el problema recordando que: *si desde un punto del espacio A trazamos las perpendiculares p y q a los planos P y Q , respectivamente, éstas formarán el mismo ángulo que los planos.*

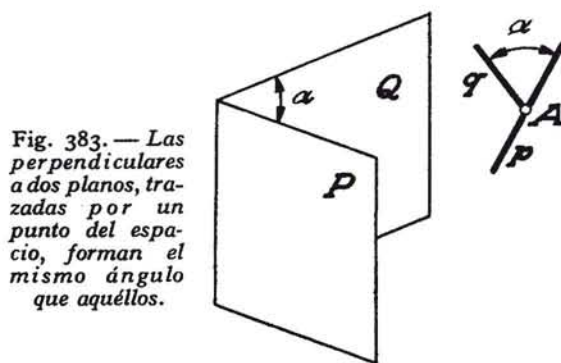


Fig. 383. — Las perpendiculares a dos planos, trazadas por un punto del espacio, forman el mismo ángulo que aquéllos.

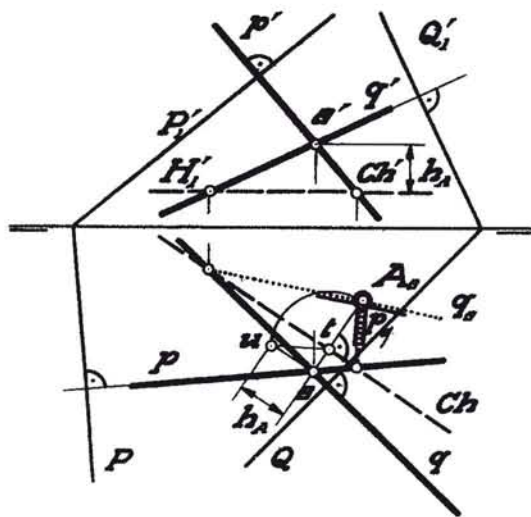


Fig. 384. — Medición directa de un ángulo diedro.

Resolución en el sistema diédrico. (Fig. 384.) Sean $P—P'$, y $Q—Q'$, los dos planos cuyo ángulo se trata de medir.

Elegimos un punto cualquiera del espacio $a—a'$ y trazamos las perpendiculares respectivas $p—p'$ y $q—q'$, las cuales, abatidas en p_a y q_a sobre el plano horizontal H'_1 , tomado como de abatimiento, nos determinan el ángulo formado por los planos en cuestión.

Trazar planos y rectas que cumplan la condición de formar ángulos determinados con rectas y con planos dados. (Fig. 385) Aunque aún no hayamos llegado al estudio de las propiedades de los lugares geométricos en el espacio, sí podemos adelantar las del cono de revolución, por el que se aprecia que todas sus generatrices forman el mismo ángulo con su eje y que éstas forman también el mismo ángulo con cualquier plano perpendicular a éste, es decir, que contenga la directriz circular del cono en cuestión.

También podemos anticipar que todos los planos tangentes a un

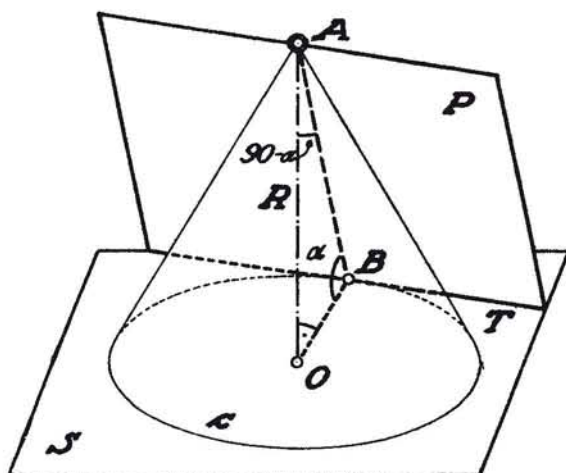


Fig. 385. — Lugar geométrico de las rectas y de los planos que forman ángulos constantes con otra recta y con un plano perpendicular a ella.

cono de revolución a lo largo de sus generatrices, formarán igualmente el mismo ángulo con el eje de dicho cono o con cualquier plano perpendicular a él.

Se observa que tanto la generatriz de contacto como el plano tangente a lo largo de ella forman con el eje R del cono de revolución un ángulo complementario del que forma con el plano de la directriz S , y que la traza T del plano tangente es la recta tangente al círculo C , directriz del cono, en el punto de arranque B de la generatriz considerada: $A-B$.

Es decir: que siempre se nos forma un triángulo rectángulo en O , en el que son catetos: el eje R del cono y el radio correspondiente $O-B$, siendo su hipotenusa la generatriz del cono de revolución considerado.

Problema 1.º Trazar por un punto A de una recta R rectas que formen con ella un ángulo determinado y sean paralelas a un plano dado P . (Figura 386.) Resolución: Se trazará el cono de revolución de vértice A , cuyas generatrices forman el ángulo exigido α , para lo cual se elegirá un plano S perpendicular a la recta R por un punto O distinto del A , determinando así sobre él la directriz circular c , cuyo radio r se conoce, puesto que se puede construir el triángulo rectángulo a que nos referíamos en la figura anterior. Se traza también por el punto A un plano (P) paralelo al dado P , el cual tendrá por traza sobre el plano de la directriz S la recta T , que cortará a ésta en los puntos 1 y 2, los cuales, unidos con A , definen las dos soluciones del problema: rectas R_1 y R_2 . Si la recta T fuera tangente a la directriz, solamente existiría una solución: la generatriz de tangencia del plano (P) con el cono; y si la recta T fuera exterior a la directriz c , no existiría solución del problema.

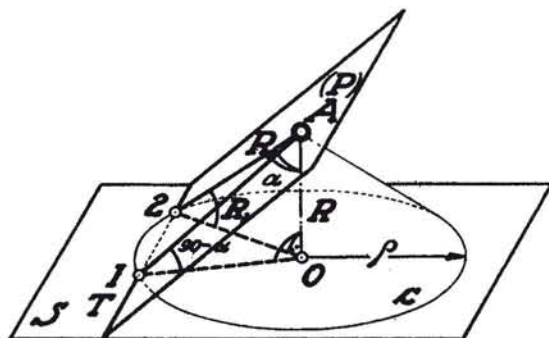


Fig. 386. — Rectas que forman ángulos dados con otra o con un plano perpendicular a ella, y estén contenidas en otra o sean paralelas a un plano dado.

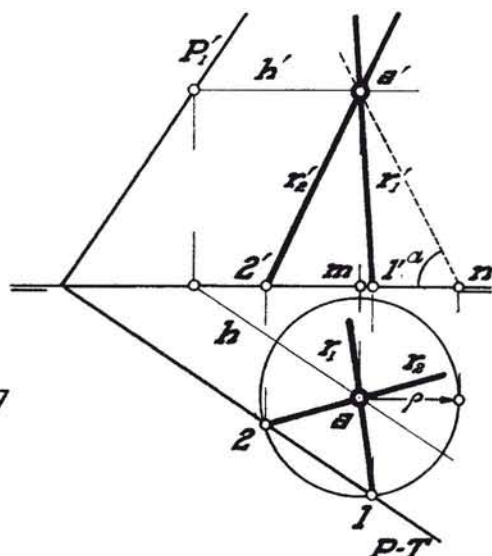


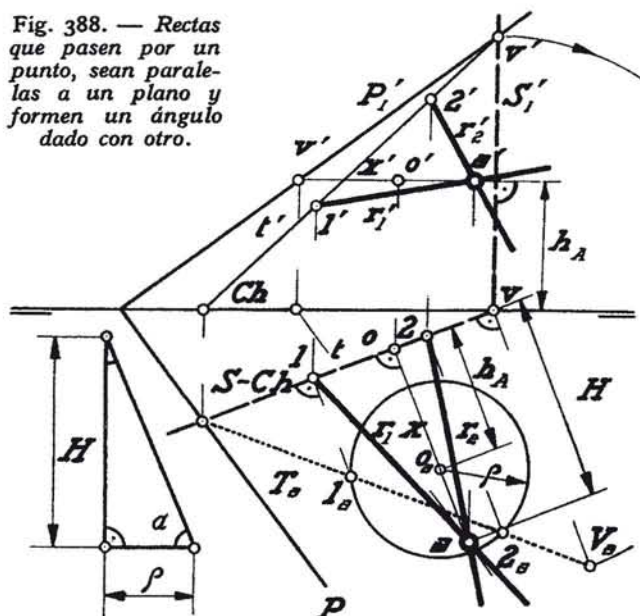
Fig. 387. — Rectas contenidas en un plano y formen un ángulo dado con el plano horizontal, pasando por un punto del primero.

Problema 2.º Trazar por un punto del espacio A rectas que formen un ángulo determinado con un plano dado S y sean paralelas a otro P . (Figura 386.) Se empleará un procedimiento análogo al utilizado en relación con el problema anterior; es decir, que se trazará el cono de revolución de vértice A cuyo semiángulo en dicho vértice sea el complementario del pedido, y se determinará asimismo su directriz circular c , cuyo centro será O , pie de la perpendicular trazada desde A al plano S . Se halla ahora la traza T del plano paralelo (P) al dado P que pase por el punto A , y de esta forma conseguiremos las rectas R_1 y R_2 que cumplen la condición exigida.

Problema 3.º *Aplicación en el sistema diédrico. Trazar rectas que estén situadas en un plano $P-P'$, que pasen por un punto dado $a-a'$ y formen un ángulo α con el plano horizontal. (Fig. 387.)* Se elegirá este punto $a-a'$ como vértice del cono de revolución cuya directriz se hallará situada en el plano horizontal, siendo su centro la proyección del punto a y su radio ρ el que se determina mediante el triángulo rectángulo $a'-m-n$.

La traza horizontal P del plano corta a la circunferencia directriz en los puntos 1 y 2, de donde parten las rectas $r_1-r'_1$ y $r_2-r'_2$, que responden a la cuestión.

Fig. 388. — Rectas que pasen por un punto, sean paralelas a un plano y formen un ángulo dado con otro.



Problema 4.º *Sistema diédrico. Trazar las rectas posibles que, situadas en el plano $P-P'$, pasen por uno de sus puntos $a-a'$ y formen con el plano $S-S'$ un ángulo α . (Fig. 388.)* En este caso, el cono de revolución de vértice $a-a'$ tendrá por altura la distancia H del punto $a-a'$ al plano $Q-Q'$, que será horizontal y, por tanto, viene representada por el segmento $a-o$, $a'-o'$.

Con ella y con el ángulo α determinamos, aparte, el radio ρ del círculo situado en el plano $S-S'$ directriz del cono, el cual abatido nos da O_a tomando por charnela $S-Ch$. En el mismo plano de abatimiento, que es el horizontal de proyección, viene también abatida T_a , traza $t-t'$ del plano $P-P'$ con el $S-S'$, la cual nos determina los puntos 1_a y 2_a . Deshecho su abatimiento, obtenemos los dos puntos de la traza $t-t'$: $1-1'$ y $2-2'$, los cuales, unidos con el $a-a'$, nos proporcionan las rectas solución: $r_1-r'_1$ y $r_2-r'_2$.

Problema 5.^o *Trazar por una recta dada R un plano P que forme con otro dado S un ángulo α . (Fig. 389.) La resolución del problema en el espacio consistirá primeramente en formar el cono de vértice A (siendo A un punto cualquiera de la recta R), cuyo eje X sea perpendicular al plano S y cuyo semiángulo en el vértice sea el complementario del α .*

Desde el punto C en que la recta dada R corta al plano S se trazan las tangentes posibles a la directriz c de este cono, y se obtiene así el plano que responde al enunciado. Si el punto C fuera interior a la directriz, no habría solución posible a este problema; y si fuera un punto de la misma, solamente existiría una solución.

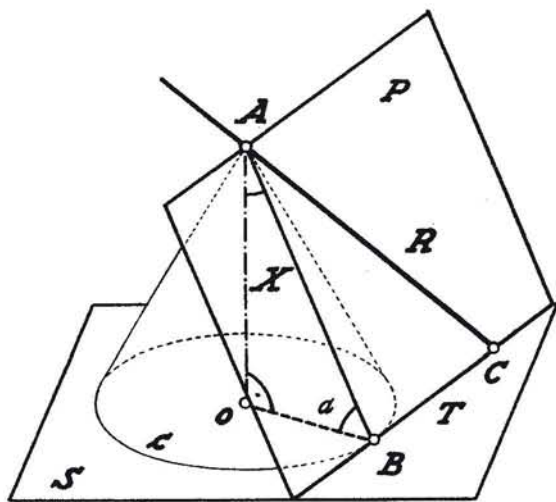


Fig. 389. — Planos que pasen por una recta y formen con otra dada o con un plano perpendicular a ella, ángulos determinados.

Problema 6.^o *Trazar por una recta dada R los planos que formen con otra (X) un ángulo determinado. (Fig. 389.) Por un punto A de la recta R trazáramos una recta X paralela a la dada (X), la cual será eje de un cono de revolución cuyo semiángulo en el vértice fuera el dado. Trazado un plano S normal a X determinaríamos en él, y mediante el triángulo ya conocido $A-O-B$, la directriz circular c , para luego, desde el punto C , traza de R sobre S , trazar las tangentes posibles a ella, que en unión de la R nos definan los planos solución.*

Podrán existir una o dos soluciones, o ninguna, según sea el punto C perteneciente a la directriz, exterior a ella o interior, respectivamente.

Problema 7.º *Sistema diédrico. Trazar por una recta dada $r-r'$ planos que formen con el horizontal de proyección el ángulo α . (Fig. 390.)* Elegido un punto $a-a'$ de la recta $r-r'$ como vértice del cono de revolución, determinaremos su directriz circular situada en el plano horizontal. Su radio es ρ y su centro o , coincidente con a ; las tangentes P y (P) en los puntos b y (b) desde $c-c'$, traza horizontal de la recta $r-r'$, serán las trazas horizontales de los planos solución del problema. Para obtener la traza vertical P'_1 del plano P nos hemos valido de

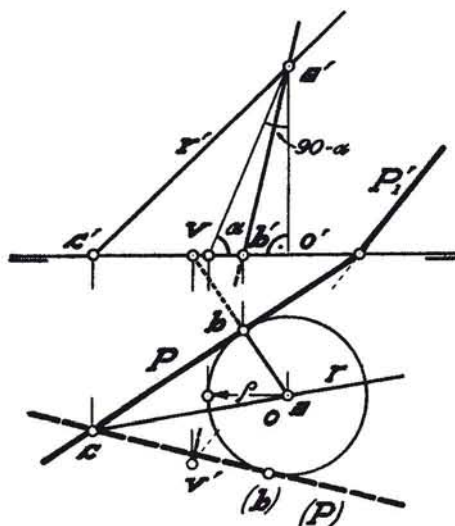


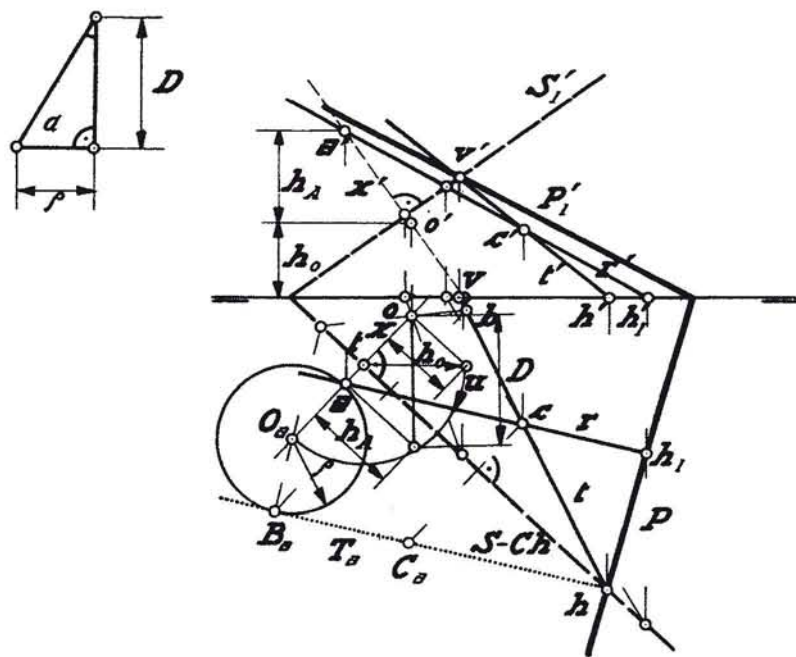
Fig. 390. — Planos que pasen por una recta y formen con el horizontal un ángulo dado.

la generatriz del cono $\overline{a-b}$, $\overline{a'-b'}$, por cuya traza vertical $v-v'$ ha de pasar P'_1 .

Como comprobación, también la traza vertical de la recta $r-r'$ debe ser un punto de P'_1 .

Problema 8.º *Trazar por una recta dada $r-r'$ planos que formen con el $S-S'_1$ un ángulo α . (Fig. 391.)* Para ello elegiremos un punto $a-a'$ de la recta $r-r'$; hallaremos los elementos característicos del cono de revolución cuyo vértice sea este punto. Su directriz está situada en el plano $S-S'_1$, teniendo por semiángulo en el vértice el complementario del dado α .

Logramos también el punto $c-c'$, traza de la recta $r-r'$ con el plano $S-S'_1$, para lo cual hemos utilizado su plano proyectante ver-



tical. Tomamos ahora como plano de abatimiento el horizontal, a fin de conseguir la posición abatida del círculo directriz tomando por charnela la traza $S-Ch$. El punto $c-c'$ abatido viene en C_a y desde él trazamos la tangente T_a a la directriz en su punto B_a , y deshecho este abatimiento teniendo presente que el punto h es doble, obtenemos t , que habrá de pasar por c . Mediante h' tendremos su proyección vertical t' : $h'-c'$. El plano solución del problema estará integrado, como ya hemos visto, por las rectas $t-t'$ y $r-r'$; es decir, que su traza horizontal estará definida por h y h_1 , y su traza vertical habrá de pasar por la traza vertical $v-v'$ de la recta $t-t'$.

Siendo el punto T_a exterior al círculo, existirá otra solución.

Problema 9.º Trazar planos que cumplan la condición de pasar por un punto, ser paralelos a una recta dada R y formen con otro S dado un ángulo determinado α . (Figura 392.) Por el punto dado se trazará un cono de revolución de eje X perpendicular al plano cuyas generatrices formen con él el ángulo dado α , y por el mismo punto A se trazará una recta R_1 paralela a R , terminándose de resolver el problema en forma análoga a lo expuesto en relación con la figura 389.

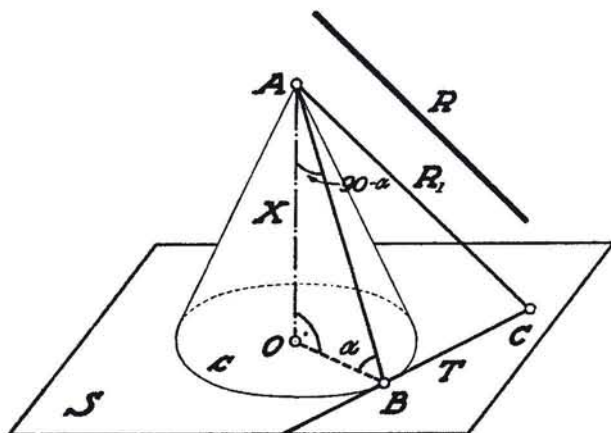


Fig. 392. — Planos paralelos a una recta y que formen ángulos dados con otra o con un plano perpendicular a ella.

Problema 10. Trazar planos que formen con una recta dada X un ángulo determinado y sean paralelos a otra dada R . (Fig. 392.) Por un punto A elegido arbitrariamente sobre la recta X se trazará un cono de revolución cuyo semiángulo en el vértice sea el dado, determinando en un plano S perpendicular a dicha recta su directriz circular c en la forma sabida. Por el vértice del cono A se trazará una recta R_1 paralela a la dada, y con auxilio del punto C se terminará el problema en la misma forma ya explicada en el problema anterior.

CAPITULO XI

CAMBIOS Y GIROS

Sistema acotado: Cambio del plano de proyección. - Sistema diédrico: Cambio de los planos de proyección. - Sistema cónico: Cambio del plano del cuadro. - Cambio del plano geometral. Cambio del punto de vista perpendicularmente al plano del cuadro y paralelamente a él. - Giros en el sistema diédrico. - Giro circular cuando el eje es perpendicular a un plano de proyección. Giro circular cuando el eje es oblicuo. - Giro elíptico. - Problemas. - Traslaciones.

Será necesario con frecuencia obtener proyecciones de una forma lituadas en una posición determinada, para conseguir ventajas resolutivas a veces, o bien representaciones aclaratorias de algún detalle particular. Para ello existen dos artificios llamados cambios y giros, que se diferencian esencialmente en que en los cambios la forma del espacio queda fija en posición y se eligen convenientemente los planos de proyección para situarlos en relación con la forma de la manera que se estipule, y en los giros sucede lo contrario, y es que permanecen fijos los planos de proyección y las direcciones proyectantes, variando de posición la forma mediante giros que se efectúan en condiciones convenientes. (Compárense las figuras 398 y 426.)

También en el sistema cónico no solamente se cambian de posición los planos de proyección, sino también el centro proyectante, como más adelante veremos.

GAMBIO PARALELO DEL PLANO DE REPRESENTACION EN EL SISTEMA ACOTADO

Figura 393. Siendo π el plano de representación o de proyección sobre el cual se ha conseguido la proyección del conjunto del espacio, se desea conocer, en función de ésta, la nueva proyección del mismo conjunto sobre otro plano π' paralelo al anterior.

Como la dirección proyectante es ortogonal a π , seguirá siéndolo

a π' ; por lo tanto, cuando coincidan los dos planos con el del dibujo, también se confundirán las dos proyecciones del conjunto; concretándolas al punto A , la proyección a' sobre el plano del dibujo coincidirá con la conocida a . La única diferencia es que la cota de que se vaya a afectar a a' habrá de ser modificada en un sumando correspondiente a la cota del plano π' con respecto a π . En el caso que representa la figura, si el punto a tiene una cota sobre el plano π : $(+h_A)$, la representación a' estará afectada de la cota $(+h'_A) = (+h_A - h_{\pi'})$, siendo $(+h_{\pi'})$ la cota del plano π' sobre el π .

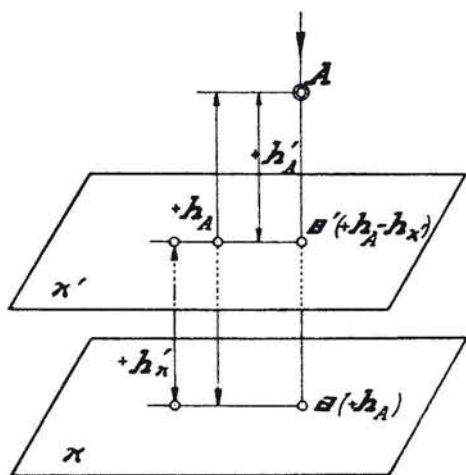


Fig. 393. — Cambio paralelo del plano de proyección en el sistema acotado.

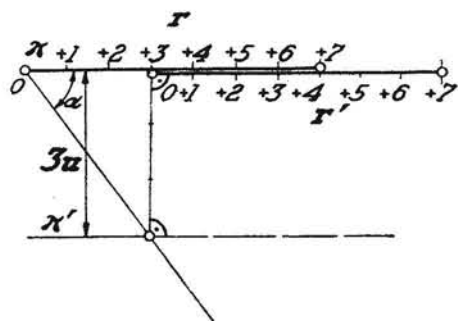


Fig. 394. — Realización del cambio paralelo del plano de proyección en el sistema acotado.

Cuando conozcamos la proyección acotada de una forma de tercera categoría, coincidirá ésta con la obtenida sobre un plano paralelo al de referencia, teniendo únicamente que variar las cotas de sus puntos en una cantidad en más o en menos que corresponde a la cota del nuevo plano de representación, según sea negativa o positiva.

Una recta r representada en este sistema en la figura 394, dados sus puntos de cotas (0) y $(+7)$, se representa en r' cuando el plano π' tiene una cota $(+3)$, por ejemplo, motivo por el cual el punto de cota $(+3)$ de la recta r será en la nueva r' de cota (0) , con lo cual se observa que todos los puntos han sido afectados del sumando (-3) que aparecen en la figura colocados al lado de sus correspondientes de la recta r .

CAMBIO OBLICUO DEL PLANO DE PROYECCION EN EL SISTEMA ACOTADO

Figura 395. Supongamos que el plano π va a ser sustituido por el π' , que forma un ángulo cualquiera con él.

La forma del espacio $A-B-C$ contenida en el plano (P) tiene por proyección sobre π : $a-b-c$. Se desea conocer la nueva proyección ortogonal $A'-B'-C'$ sobre el plano π' en función de la $a-b-c$.

Para ello, después de efectuada la proyección ortogonal antes mencionada, se tendrá que hacer coincidir el plano π' con el del dibujo

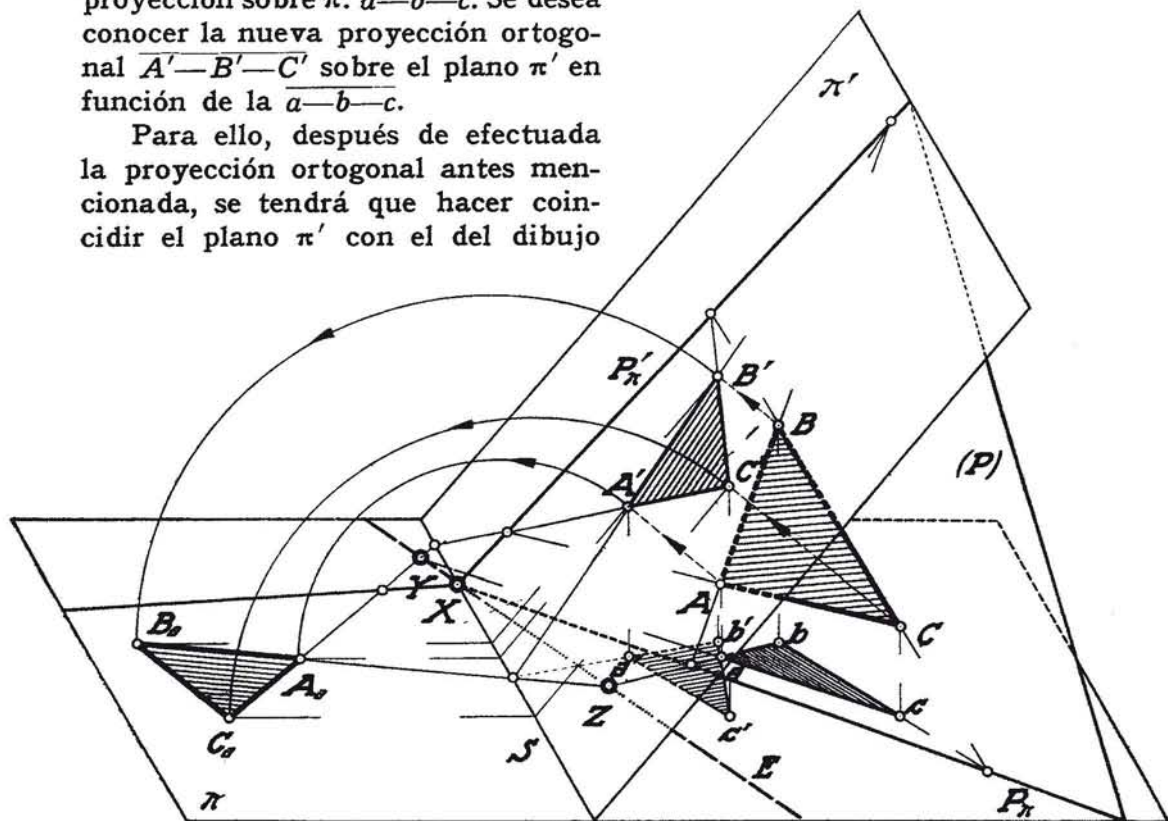


Fig. 395. — Cambio de plano de proyección en el sistema acotado: Caso general.

que, naturalmente, habrá de ser el plano π , sobre el cual ya tenemos la proyección primitiva $a-b-c$.

Es indudable que existe una relación sencilla de afinidad entre las distintas proyecciones cilíndricas que aparecen en la figura. Sabemos: 1.º Que $A-B-C$ es afín de $a-b-c$, siendo su eje de afinidad la traza P_π del plano (P) con el plano π . 2.º También son afines las figuras $A-B-C$ y $A'-B'-C'$, siendo el eje de afinidad la traza $P_{\pi'}$ del plano π' con el de la figura (P) . 3.º Son afines la $A'-B'-C'$ y

su abatimiento $A_a-B_a-C_a$, teniendo por eje de afinidad la traza S del plano π' con el π . Por consiguiente, haciendo aplicación del teorema general de homología, en este caso de afinidad, que nos dice: *Que si varias figuras sucesivas son afines entre sí con relación a ejes que pasan por un mismo punto, la primera y la última seguirán siendo afines con relación a otro eje que pase por el punto común a los intermedios*, y tal es el caso que nos va a relacionar la proyección conocida $\overline{a-b-c}$ y la deseada $\overline{A_a-B_a-C_a}$, pues todas las intermedias son afines entre sí con relación a ejes que pasan por el punto X , común a los tres planos π , π' , y el de la figura (P).

Por ello, el procedimiento a seguir para que queden relacionadas las ya mencionadas figuras va a consistir en determinar otro punto del eje E : Y o Z , ya que conocemos uno de ellos, el X , lo que lograremos conociendo dos pares de puntos afines de las figuras en cuestión.

Esto se resuelve en el sistema de proyección de la figura 396, donde se conoce la proyección $\overline{a-b-c}$ de un triángulo situado en un plano cuya línea de máxima pendiente (P) está dada, deseando conocer la nueva proyección de dicho triángulo sobre un plano cuya línea de máxima pendiente (π') también conocemos.

Empezaremos por hallar el punto X como intersección de S con P_π . Luego determinaremos dos pares de puntos afines:

La primera operación consistirá, pues, en trazar por A y C las perpendiculares al plano π' , problema que ya conocemos, hallando seguidamente las intersecciones de estas perpendiculares con dicho plano (la de C es c'), y finalmente, obtendremos los abatimientos C_a y A_a .

Nota: En vez de repetir con A lo mismo que con C , se ha hallado directamente el abatimiento de M (+ 10,70) punto de encuentro de la recta $\overline{A-C}$ con π' .

Habría que tener presente que se seguirá la regla general del abatimiento, trazando desde la proyección ortogonal del punto: c' , por ejemplo, la perpendicular y la paralela a la charnela, y tomar sobre ella la altura del punto sobre el plano de abatimiento, que es el plano π . De esta forma conseguiremos la recta $\overline{A_a-C_a}$, afín de $\overline{a-c}$, que nos determina el punto Y . El eje de afinidad será $\overline{X-Y}$.

Como comprobación, se ha operado con B en la misma forma que con C , obteniéndose el punto Z situado en E .

No cabe en este sistema cambiar la dirección de la proyectante, puesto que por esencia *la proyección ha de ser ortogonal al plano de referencia*, lo cual está puesto de manifiesto en la figura 397, donde la proyección de A sobre el plano π tiene que ser a ; pues si la dirección proyectante fuera D , ya no sería el sistema acotado, sino que se trataría en este caso de la llamada *proyección oblicua*, que formará parte de un nuevo estudio al tratar de la axonometría o de la perspectiva axonométrica en el Tomo III.—*Aplicaciones.*

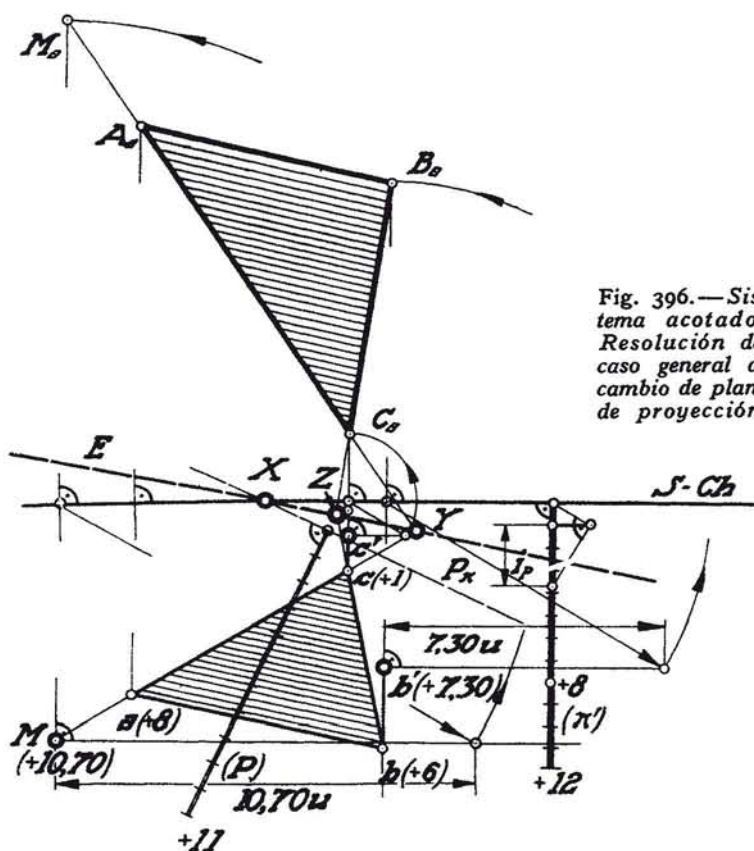


Fig. 396. — Sistema acotado: Resolución del caso general de cambio de plano de proyección.

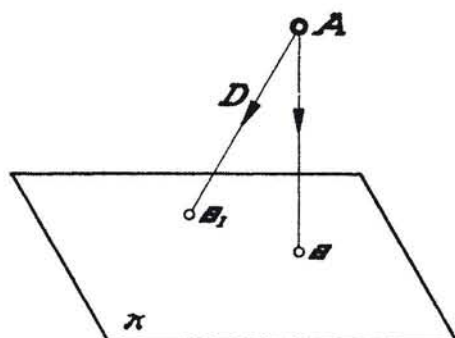


Fig. 397. — En el sistema acotado no puede existir cambio de dirección proyectante.

GAMBIO DE LOS PLANOS DE PROYECCION EN EL SISTEMA DIEDRICO

Figura 398. Según hemos definido al principio de este capítulo, el cambio de planos de proyección, principalmente en este sistema, va a

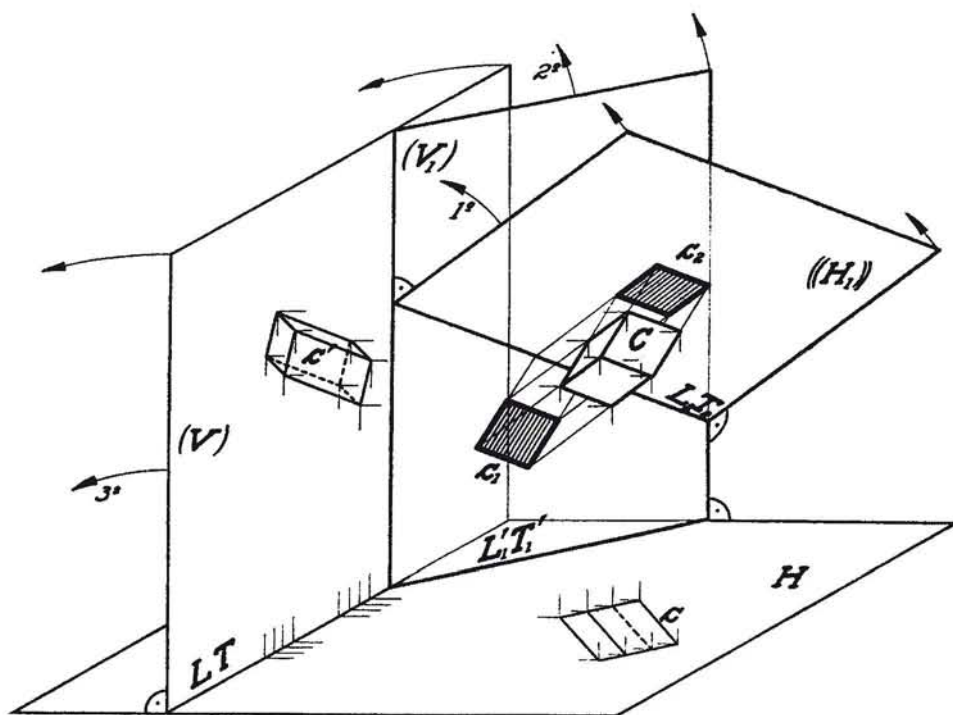


Fig. 398. — Los cambios de plano de proyección en el sistema diédrico.

consistir en conseguir un nuevo sistema diédrico de planos ortogonales entre sí: $(V_1) — ((H_1))$, que se hallen en una posición conveniente respecto de la forma del espacio que se estudie; como ejemplo, en el caso de la figura, el de ser paralelos a las caras de un cubo: C . Para conseguir en este nuevo sistema de proyección con una línea de tierra $L_2 — T_2$ las proyecciones deseadas: $c_1 — c_2$, en función de las primitivas $c — c'$, se seguirán algunas reglas que vamos a detallar a continuación. Se irán abatiendo *sucesivamente* los planos de proyección en orden tal, que coincidan todos con el del dibujo, como se indica en la figura.

Cambio del plano vertical de proyección. (Fig. 399.) No se podrán cambiar a la vez los dos planos de proyección por otros nuevos, siendo preciso escalonar las operaciones para conseguir la posición definitiva deseada, pudiendo, sin embargo, repetir tantas veces como se quiera estos cambios de planos, siendo suficiente, en la mayoría de los casos, el utilizar dos de ellos alternados. Del sistema primitivo integrado por los planos ortogonales $H-(V)$, donde se han conseguido las proyecciones del punto A del espacio según $a-a'$, vamos a tratar de obtener las nuevas proyecciones $a_1-a'_1$ del mismo en un nuevo sistema diédrico, conservando uno de los planos, el horizontal H en este caso, debiendo tener el nuevo plano vertical (V_1) , como condición imprescindible, el de ser asimismo ortogonal a dicho plano H . Concretando: nos encontra-

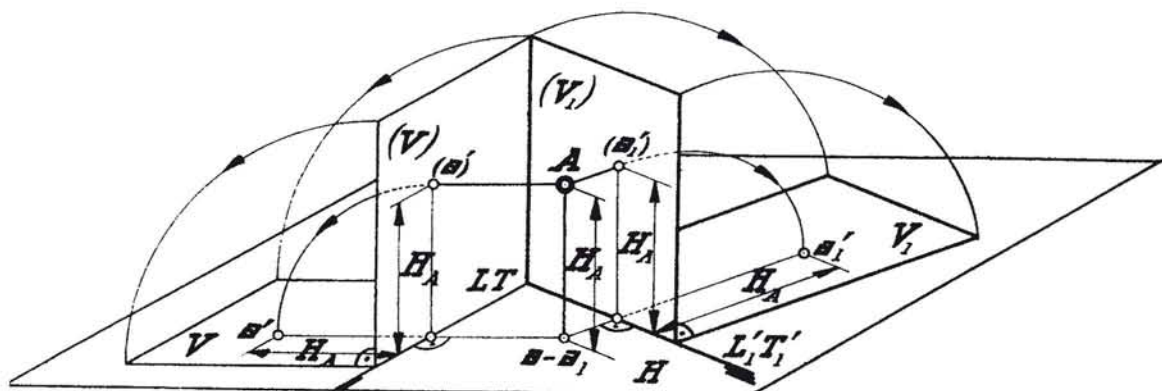


Fig. 399. — Cambio del plano vertical en el sistema diédrico.

mos con dos sistemas diédricos de líneas de tierra $\overline{L-T}$ y $\overline{L'_1-T'_1}$, con un plano común H , siendo los otros dos (V) y (V_1) ortogonales a él.

Las operaciones en el espacio consistirán en obtener las proyecciones ortogonales del conjunto sobre el nuevo plano vertical (V_1) , para luego efectuar la coincidencia o abatimiento de dicho plano sobre el plano horizontal H , que suponemos está confundido con el del dibujo.

Será preciso ver la forma de relacionar la nueva proyección a'_1 en función de la a que permanece fija y común a los dos sistemas, conociendo como es natural la a' del sistema $\overline{(V)-H}$ primitivo.

La primitiva línea de tierra es $\overline{L-T}$; la nueva se llamará $\overline{L'_1-T'_1}$, con lo cual quiere decirse que se ha cambiado el plano vertical una vez. Como el punto A se proyecta ortogonalmente por definición con respecto al nuevo sistema sobre los dos planos, la nueva proyección a'_1 , después de abatido el plano (V_1) se hallará necesariamente sobre la perpendicular trazada desde a a la nueva línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$ y a una distancia H_{a_1} de esta última igual a la altura del punto sobre el plano horizontal fijo, la cual viene medida por el segmento de proyec-

tante comprendido entre a' y la línea de tierra primitiva $\overline{L-T}$; lo cual es evidente porque las distancias que separan las proyecciones verticales a' y a'_1 de sus respectivas líneas de tierra nos miden siempre la cota del punto sobre el plano H .

Esto nos indica la forma de conseguir la nueva posición de la proyección de un punto cuando se ha cambiado el plano vertical de proyección, y está puesto de manifiesto en la figura 400. Sea el punto $a-a'$ en el sistema primitivo de línea de tierra $\overline{L-T}$. Elijamos como nueva línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$ (esta elección no es arbitraria, como más adelante apreciaremos); entonces la nueva proyección a'_1 se hallará, como hemos visto, en la perpendicular trazada desde a a ella, y su distancia H_A a $\overline{L'_1-T'_1}$ viene medida por la distancia de la antigua proyección vertical a' a su línea de tierra $\overline{L-T}$.

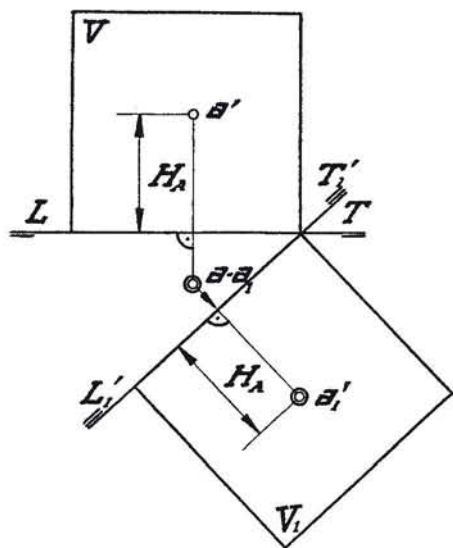


Fig. 400.—Sistema diédrico: Realización de un cambio del plano vertical de proyección.

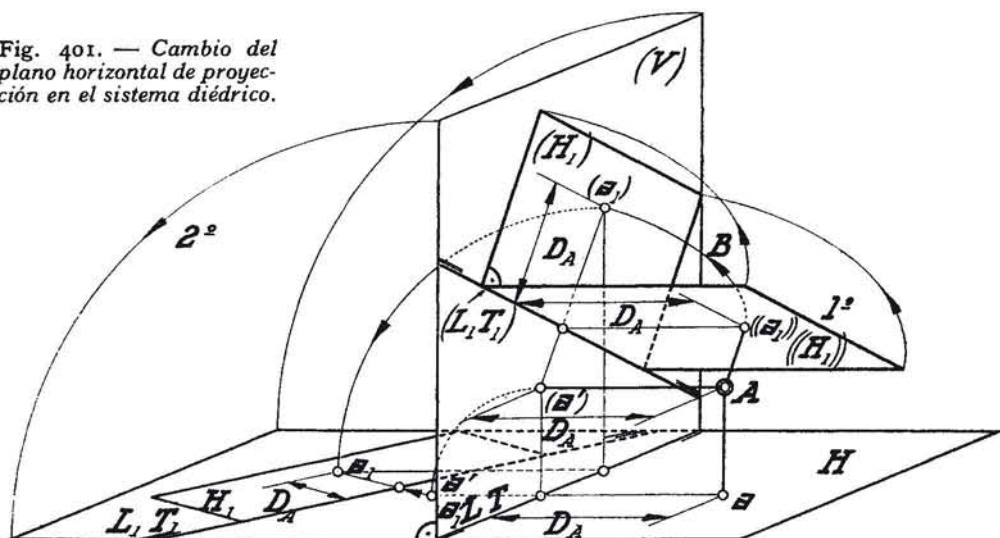
Para tener la seguridad de que se llevan ordenadamente estas distancias, se hace intervenir la posición de los trazos que subrayan la línea de tierra, los cuales nos indicarán el sentido convencional a partir del cual se habrán de tomar estas distancias.

Por ejemplo, en el caso de la figura que nos ocupa la altura H_A está a distinto lado de los trazos de la primitiva línea de tierra $\overline{L-T}$; por tanto, situada la nueva línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$, y colocados sus trazos en la forma que aparecen (uno más, por distinguir la línea de tierra nueva), habrá de llevarse la cota H_A también en sentido contrario a estos trazos, para así obtener a'_1 , debiendo operar en la misma forma para todos los puntos del conjunto y pudiéndose establecer la siguiente regla: *Para obtener la nueva posición de la proyección de un punto cuando se ha cambiado el plano vertical, se trazará por la proyección horizontal que permanece fija, la perpendicular a la nueva línea de tierra, y se llevará sobre ella y en el mismo sentido relativo respecto a sus trazos, la distancia que separa la antigua proyección de su línea de tierra.*

Cambio del plano horizontal de proyección. (Fig. 401.) Conservando fijo el plano vertical de proyección (V), vamos a construir un nuevo sistema diédrico integrado por otro plano ortogonal a (V): (H_1) que, naturalmente, no será horizontal, pero así se llamará por serle ortogo-

nal para distinguirlo del plano vertical. La nueva proyección (a_1) del punto A del espacio sobre este plano horizontal de traza (L_1-T_1) con

Fig. 401. — Cambio del plano horizontal de proyección en el sistema diédrico.



el plano fijo (V) , se podrá conseguir asimismo con el conocimiento de la proyección (a') , que queda fija en estos dos sistemas diédricos por las características de la proyección en este sistema; (a_1) estará situada en la perpendicular a (L_1-T_1) trazada por a' , cuando $((H_1))$ venga en (H_1) ; la distancia D_A que nos mide la separación del punto A al plano vertical fijo, es decir, el segmento $A-(a')$ será constante y, por tanto, habrá de ser la distancia que medie entre la nueva proyección horizontal (a_1) y la línea de tierra (L_1-T_1) .

Para conseguir la coincidencia de estos tres planos de proyección con el plano del dibujo, supondremos que éste coincide siempre con H , y por ello se precisará abatir primeramente $((H_1))$ sobre (V) en (H_1) , y nuevamente, el conjunto de estos dos confundidos, alrededor de $L-T$ sobre el plano H en H_1 . De esta forma se obtienen las nuevas proyecciones de un punto según se indica en la figura 402, donde se ha cambiado el plano horizontal cuya traza se indica por la línea de tierra L_1-T_1 , apareciendo la nueva proyección horizontal a_1 , aplicando la misma regla ya enunciada anteriormente; es decir, trazando desde a' , que permanece fijo y es, por

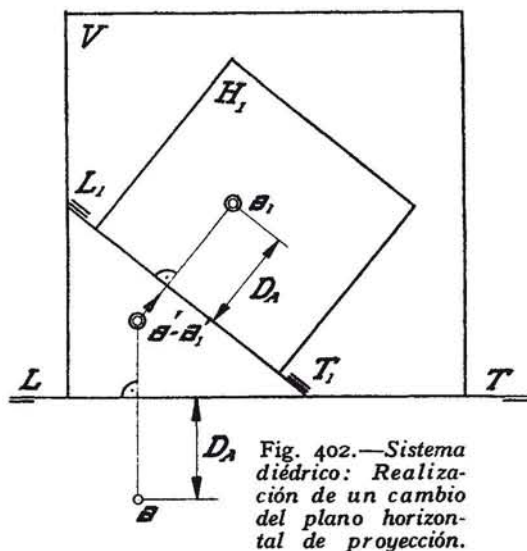


Fig. 402. — Sistema diédrico: Realización de un cambio del plano horizontal de proyección.

tanto, a'_1 también, la perpendicular a la nueva línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$, y llevando la distancia D_A que separa la antigua proyección a de su línea de tierra $\overline{L-T}$, a partir de la nueva línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$, sobre la perpendicular trazada, y, en la misma región donde se hallan los trazos de dicha línea de tierra.

En la figura 403 aparece la combinación de los dos cambios, primero de plano vertical y luego de plano horizontal donde se han suprimido los recuadros que representaban las porciones de planos abatidos y donde se aprecia la definitiva proyección del punto $a_2-a'_2$ partiendo de las primitivas $a-a'$ pasando por las intermedias $a_1-a'_1$: primeramente se ha cambiado el plano vertical con la línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$, y aplicando la regla enunciada se obtiene la posición del punto: a_1 (confundido con a) y a'_1 , alejado H_A de su línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$. Conseguimos con la misma regla la posición a'_2-a_2 , siendo comunes, como se aprecia, a'_1 y a'_2 .

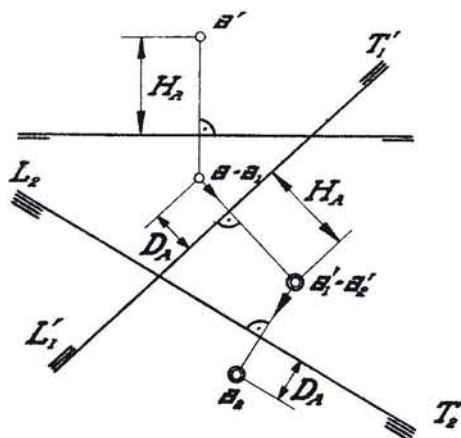


Fig. 403. — Sistema diédrico: Cambio sucesivo del plano vertical y del plano horizontal de proyección.

Mediante un cambio se consigue que una recta cualquiera sea paralela a un plano de proyección. (Fig. 404.) Sea la recta R del espacio proyectada según $r-(r')$ en el sistema diédrico integrado por los planos $H-(V)$, de línea de tierra $\overline{L-T}$.

Si nosotros elegimos un nuevo plano vertical (V_1) de línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$, de tal forma que resulte ser paralelo al plano proyectante horizontal de la recta, es decir, colocando $\overline{L'_1-T'_1}$ paralela a r , entonces la recta proyectada en este sistema será $r_1-(r'_1)$, transformada, por tanto, en una frontal o vertical del sistema.

Si nosotros elegimos un nuevo plano vertical (V_1) de línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$, de tal forma que resulte ser paralelo al plano proyectante horizontal de la recta, es decir, colocando $\overline{L'_1-T'_1}$ paralela a r , entonces la recta proyectada en este sistema será $r_1-(r'_1)$, transformada, por tanto, en una frontal o vertical del sistema.

Figura 405. Se efectúan las operaciones indicadas en la figura anterior en el sistema diédrico, donde la recta $r-r'$ ocupa la posición $r_1-r'_1$ en el nuevo sistema integrado por la línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$, paralela a r . Las nuevas proyecciones de dos de sus puntos (en este caso se han elegido sus trazas $h-h'$ y $v-v'$), nos determinan r'_1 . El haber elegido la traza $h-h'$ reporta la ventaja de que, siendo su altura O , su nueva proyección h'_1 se hallará en la línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$.

Por este artificio podemos operar con la recta en esta situación particular, que a veces nos será ventajoso.

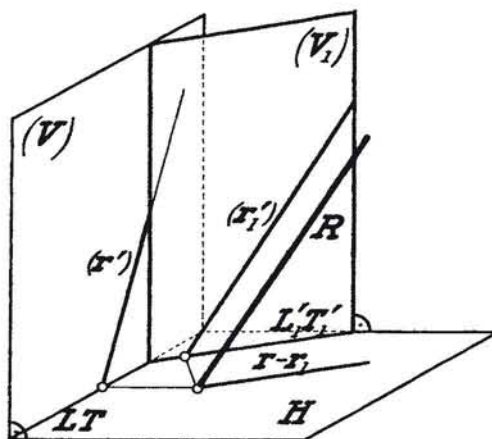


Fig. 404. — Por un cambio de plano vertical, una recta cualquiera viene a resultar frontal en el nuevo sistema diédrico formado.

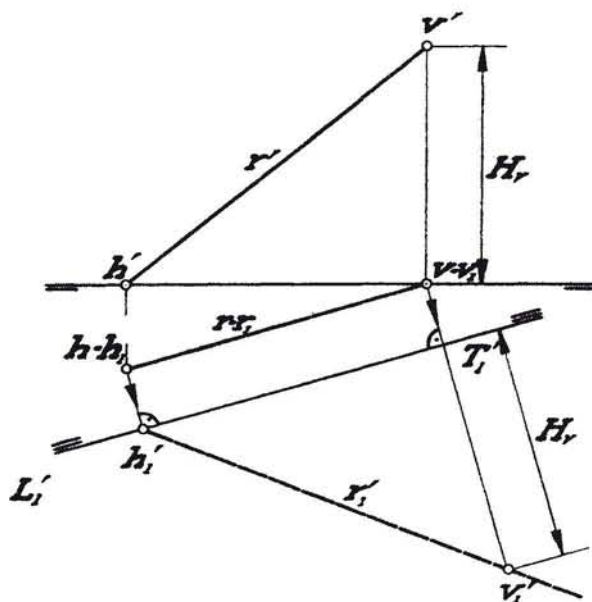


Fig. 405. — Sistema diédrico: Por un cambio de plano vertical, una recta cualquiera se convierte en frontal del nuevo sistema.

Por un cambio se consigue que una recta paralela a un plano de proyección se transforme en recta de punta. (Fig. 406.) Sea la recta R de proyecciones r —(r') paralela al plano (V) del sistema diédrico (V)— H . Si elegimos ahora un nuevo plano horizontal ((H_1)) de traza $\overline{L_1—T_1}$ con el plano vertical, perpendicular a (r'), conseguimos que la recta R sea de punta en este nuevo sistema diédrico constituido, posición que nos será muy útil, como más adelante veremos.

Esto queda de manifiesto en la figura 407, donde la recta r — r'

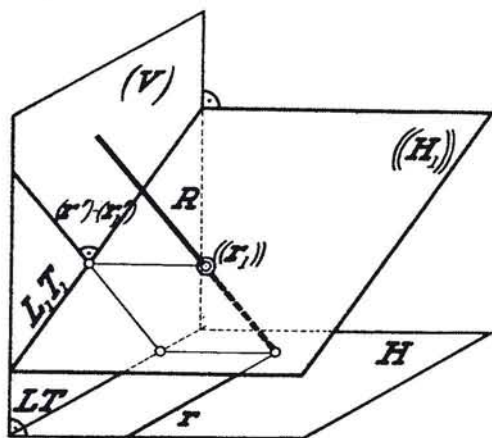


Fig. 406. — Por un cambio de plano horizontal, una frontal resulta de punta en el nuevo sistema diédrico constituido.

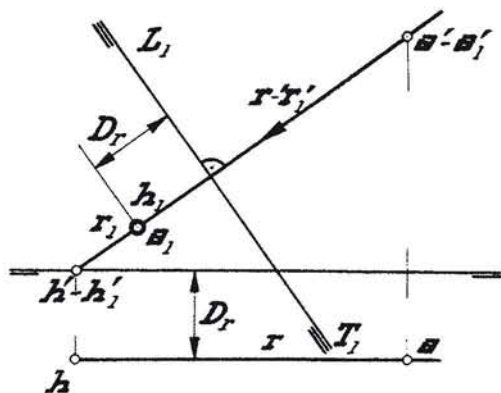


Fig. 407. — Sistema diédrico: Una frontal se ha colocado de punta mediante el cambio del plano horizontal de proyección.

paralela al plano vertical se sitúa de punta cuando se elige el nuevo plano horizontal de traza $\overline{L_1—T_1}$ perpendicular a r' .

La comprobación gráfica de que esta recta es de punta resulta al observar que un punto cualquiera de ella, al ser cambiado, tendrá la misma nueva proyección horizontal r_1 , por ser D_r constante para todos ellos; es decir, por equidistar del plano vertical.

Hallar un nuevo sistema diédrico mediante dos cambios de plano, de tal forma que una recta cualquiera r — r' se coloque de punta. (Fig. 408.) Empezaremos por elegir un nuevo plano horizontal $\overline{L_1—T_1}$, de tal forma que la recta sea una horizontal de este sistema, para lo cual la nueva línea de tierra elegida habrá de ser paralela a r' .

Cambiando dos puntos de esta recta, el v — v' y el a — a' , se obtienen las nuevas proyecciones v_1 — v'_1 y a_1 — a'_1 , respectivamente, ya

que v'_1 y a'_1 coinciden con v' y a' , por haber permanecido fijo el plano vertical de proyección en estos dos sistemas.

De esta suerte se consigue la recta horizontal $r_1-r'_1$, y elegida ahora una línea de tierra $L'_2-T'_2$, de tal forma que sea perpendicular a r_1 , es decir, cambiando ahora el plano vertical de proyección, conseguimos que la nueva proyección de la recta: r'_2 , sea un punto, con lo cual queda en este último sistema colocada la recta tal y como se deseaba.

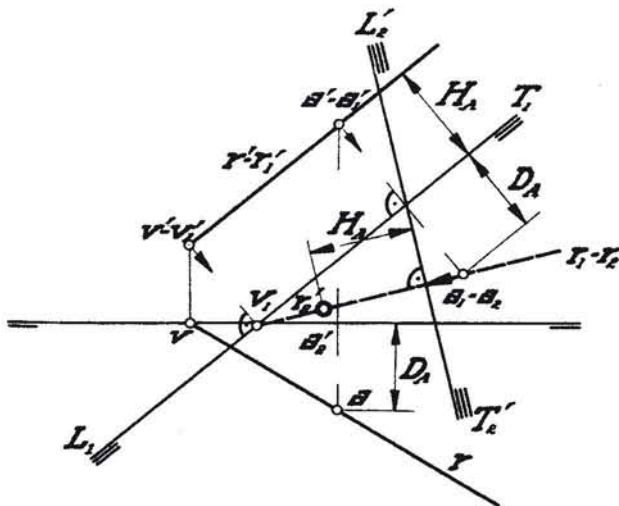


Fig. 408. — Sistema diédrico: Cambio sucesivo del plano horizontal y del plano vertical de proyección, por el que se consigue que una recta cualquiera sea de punta.

Por un cambio de plano de proyección se sitúa un cualquiera como proyectante. (Figura 409.) El plano es $P-(P')$, situado en el sistema diédrico $H-(V)$. Se podrá conseguir como plano proyectante cuando se elija un nuevo plano vertical, por ejemplo, (V_1) , de tal forma que su línea de tierra $L'_1-T'_1$ sea perpendicular a la traza horizontal P del plano. En esta situación, tiene este plano la ventaja de todo plano proyectante; y es que todo su contenido se proyecta según su nueva traza vertical: (P'_1) .

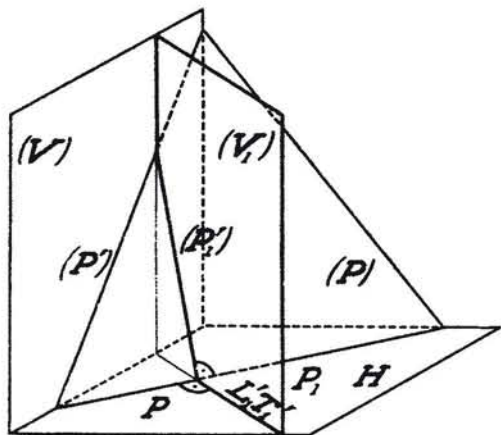


Fig. 409. — Por un solo cambio de plano vertical, un plano cualquiera resulta proyectante vertical.

de fijar la atención en que P'_1 no es la posición cambiada de P' , considerada como recta.

Como observación, haremos notar que al utilizar este artificio del cambio de plano de proyección anotaremos el plano $P-P'$, y no $P-P'_1$, a fin de no incurrir en confusiones frecuentes. Así, en este caso, la nueva representación del plano en este sistema se llamará $P_1-P'_1$, con lo cual indicamos que se ha efectuado un solo cambio con la línea de tierra $L'_1-T'_1$. Es

Como observación, haremos notar que al utilizar este artificio del cambio de plano de proyección anotaremos el plano $P-P'$, y no $P-P'_1$, a fin de no incurrir en confusiones frecuentes. Así, en este caso, la nueva representación del plano en este sistema se llamará $P_1-P'_1$, con lo cual indicamos que se ha efectuado un solo cambio con la línea de tierra $L'_1-T'_1$. Es

La manera de conseguir la realización de lo que acabamos de exponer en el plano del dibujo, entra en juego en la figura 410, donde el plano $P-P'$ va a ocupar la posición $P_1-P'_1$, al elegir la línea de tierra $L'_1-T'_1$ ortogonal a P .

La nueva posición P'_1 se va a lograr obteniendo únicamente la posición cambiada de un solo punto del plano, por la propiedad ya expuesta anteriormente de que todo lo que contiene se proyecta según su nueva traza vertical. El punto $v-v'$ tendrá como nueva posición $v_1-v'_1$, quedando así definida la traza P'_1 .

Sin embargo, nos será más cómodo, siempre que podamos, elegir

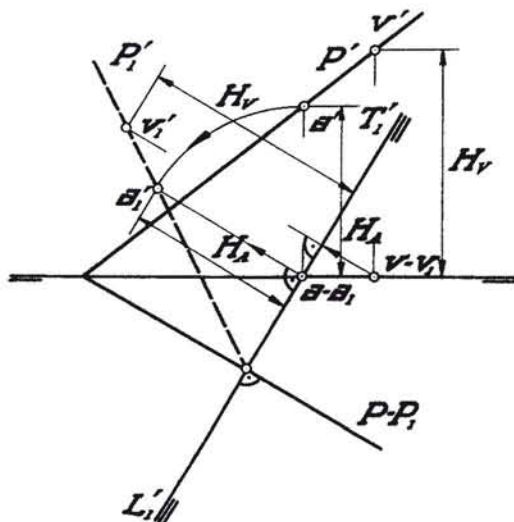


Fig. 410.—Sistema diédrico: Por un cambio de plano de proyección, un plano cualquiera se convierte en proyectante.

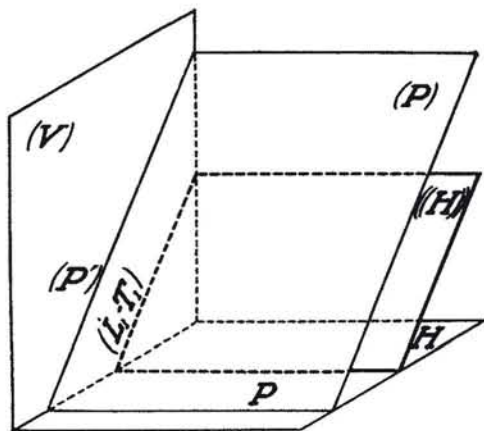


Fig. 411.—Sistema diédrico: Por un cambio de plano de proyección, un plano proyectante se convierte en paralelo a él.

como punto del plano: $a-a'$, el de la traza vertical correspondiente al de encuentro de las dos líneas de tierra antigua y nueva, pues de esta forma se transporta con el compás la altura A del punto, en la forma sabida, ahorrándonos, por consiguiente, líneas de construcción.

Por un cambio de plano se coloca un plano proyectante paralelo al de proyección. (Fig. 411.) El plano (P) proyectante con respecto al plano vertical (V) , quedará paralelo al nuevo plano horizontal $((H_1))$ si se elige la línea de tierra (L_1-T_1) paralela a (P') , pues entonces se cumple la condición de paralelismo de los dos planos, por ser ambos perpendiculares al mismo plano de proyección (V) .

De esta suerte, todo lo que contuviere el plano (P) se proyectaría en verdadera magnitud sobre el nuevo plano horizontal $((H_1))$.

Figura 412. Se pone de manifiesto lo que en la figura del espacio se acaba de explicar, donde se ve que la nueva línea de tierra $\overline{L_1-T_1}$ es paralela a P' , y entonces el plano únicamente tiene por representación a la recta P'_1 , confundida con P' .

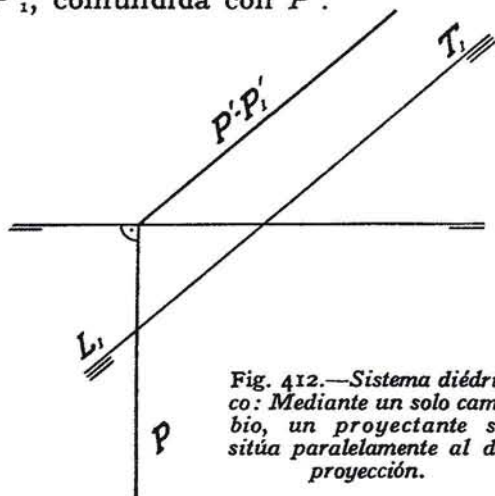


Fig. 412.—Sistema diédrico: Mediante un solo cambio, un proyectante se sitúa paralelamente al de proyección.

Hacer que un plano cualquiera se coloque paralelo a uno de proyección mediante dos cambios de plano. (Fig. 413.) Sea el plano $P-P'$. Elegida una línea de tierra $\overline{L_1-T_1}$ perpendicular a P , lo cual indica que hemos

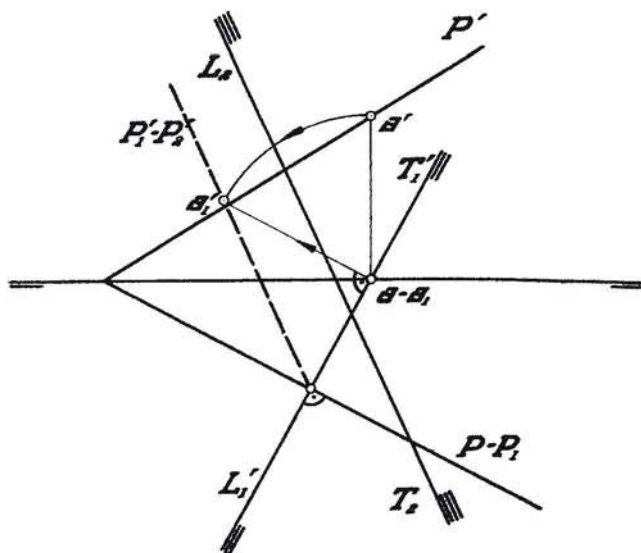


Fig. 413.—Sistema diédrico: Con dos cambios sucesivos de los planos de proyección, un plano cualquiera es paralelo a uno del nuevo sistema.

cambiado el plano vertical, se ha situado el plano en cuestión, como proyectante vertical de este nuevo sistema diédrico, ocupando la posición $P_1-P'_1$ con el auxilio del punto $a-a'$ cambiado en $a_1-a'_1$. Elegida la línea de tierra $\overline{L_2-T_2}$ paralela a P'_1 , tenemos conseguido el plano P'_2 en la posición exigida.

APLICACIONES DE LOS CAMBIOS DE PLANOS DE PROYECCIÓN

Problema 1.º *Determinar la mínima distancia entre dos rectas que se cruzan en posición y magnitud.* (Fig. 414.) Teniendo en cuenta lo dicho en relación con la figura 408, por lo que se aprecia que una recta cualquiera se ha colocado de punta, situaremos el conjunto de las dos rectas que se cruzan en la misma posición que aparece en la figura 341, donde se mide directamente la mínima distancia que las separa, conociéndose inmediatamente la posición de dicha perpendicular común. Sean $r-r'$ y $s-s'$ las rectas en cuestión. Elegiremos una línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$, de tal forma que nos indique que cambiamos el plano vertical para que la recta S venga a situarse como frontal del nuevo sistema diédrico y en la posición $s_1-s'_1$. También obtendremos la nueva proyección de la recta R mediante dos de sus puntos: $h_{r-1}-h'_{r-1}$ y $z_1-z'_1$, obteniéndose así en el nuevo sistema $r_1-r'_1$.

Cambiando el plano horizontal ahora, y elegida como línea de tierra $\overline{L_2-T_2}$ perpendicular a s'_1 , obtenemos la nueva posición de punta de esta recta: $s_2-s'_2$, y en este mismo sistema aparece también $r_2-r'_2$, obtenida también mediante los puntos $h_{r-2}-h'_{r-2}$ y $z_2-z'_2$. En esta última proyección aparece la perpendicular común a_2-b_2 , $a'_2-b'_2$, que también es $a'_1-b'_1$, la cual referiremos con relación a la línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$, y en sentido inverso a la anterior, en a_1-b_1 . Así logramos $a-b$ y, finalmente, $a'-b'$, en el sistema primitivo.

Problema 2.º *Dadas las proyecciones de una recta, se ha de elegir un nuevo plano vertical para que la recta se encuentre situada en el primer bisector de este nuevo sistema.* (Fig. 415.) Sea la recta $r-r'$. Sabemos que esta recta habrá de tener sus proyecciones simétricas con respecto a la nueva línea de tierra. Al cambiar el plano vertical, el horizontal permanece fijo, y por ello la traza horizontal $h-h'$ de la recta será un punto de la línea de tierra nueva: $h_1-h'_1$. Desde la proyección horizontal a de un punto cualquiera de $r-r'$, trazamos un arco de círculo de radio: $H_A =$ altura del punto. Las tangentes al arco trazadas desde $h_1-h'_1$ nos dan las soluciones. Basta seguir la construcción de la figura para comprobar la exactitud del resultado.

Se observa que si colocáramos los trazos de la línea de tierra $\overline{L'_1-T'_1}$ en el lado opuesto, la nueva proyección a'_1 coincidiría con a_1 , proyección horizontal fija, confundidas, y la recta, entonces, se hallaría situada en el segundo plano bisector del nuevo sistema.

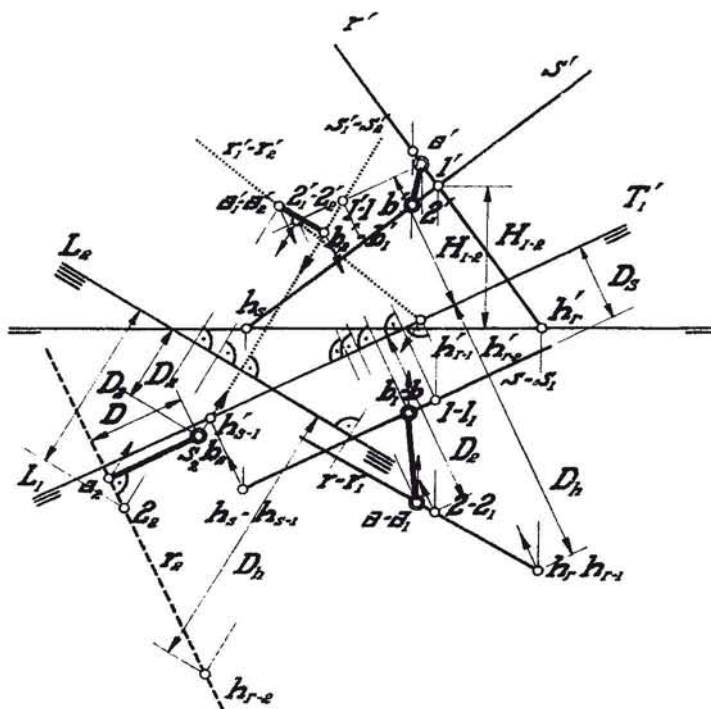


Fig. 414.—Sistema diédrico: Mínima distancia en magnitud y posición entre dos rectas que se cruzan utilizando dos cambios de planos de proyección.

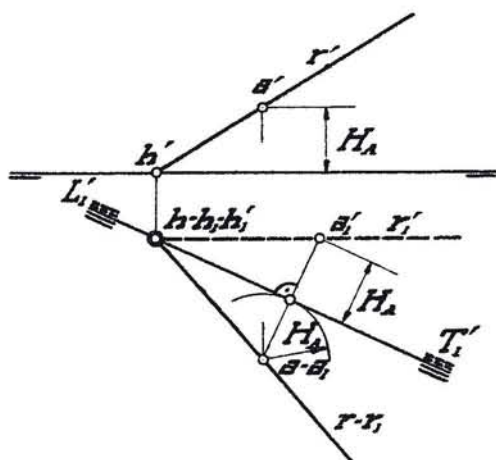


Fig. 415. — Sistema diédrico: Una recta cualquiera se sitúa en uno de los bisectores de un nuevo sistema con un solo cambio de plano de proyección.

Problema 3.^o *Determinar el plano bisector del diedro formado por dos planos dados. (Fig. 416.) Sean los planos $P-P'$ y $Q-Q'$, cuya intersección $i-i'$ vamos a hacer que sea de punta en un nuevo sistema diédrico, para así medir el ángulo y trazar su bisector. (Véase fig. 380.)*

Efectuaremos un primer cambio de plano (horizontal) tomando como línea de tierra L_1-T_1 (paralela a $i-i'$), de tal forma que $i-i'$ se convierta en una horizontal $i_1-i'_1$, utilizando sus puntos $h-h'$ y $v-v'$, que ocupan las posiciones h'_1-h_1 y v'_1-v_1 .

Las nuevas trazas de los planos habrán de pasar por los puntos p y q

en que cortan P' y Q' a la línea de tierra L_1-T_1 , y serán paralelas a i_1 por estar $i_1-i'_1$ contenida en ambos planos (su intersección) y ser horizontal. Por ello, los planos quedarán representados por $P_1-P'_1$ y $Q_1-Q'_1$, en este primer cambio.

Cambiemos ahora el plano vertical de proyección, tomando como nueva línea de tierra: $L'_2-T'_2$, perpendicular a i_1 , con lo cual la intersección es de punta con respecto a este nuevo

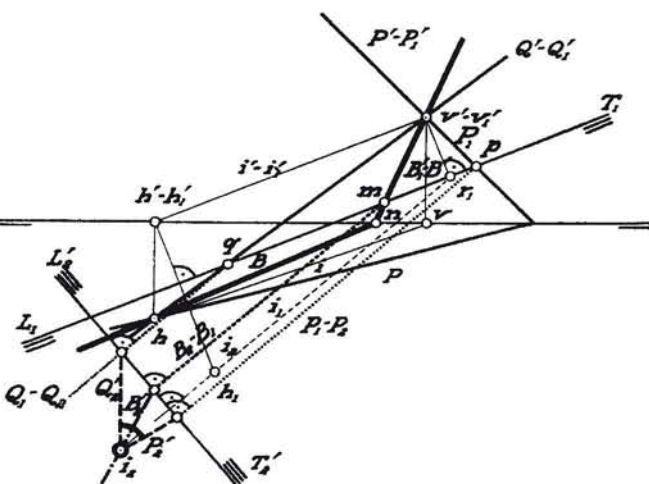


Fig. 416.—Sistema diédrico: Determinación de los bisectores de un diedro utilizando dos cambios sucesivos de planos de proyección.

plano vertical y tendrá por proyecciones: $i_2-i'_2$.

Por i'_2 habrán de pasar las nuevas trazas de los planos Q'_2 y P'_2 , que nos miden el ángulo plano correspondiente al diedro $P-Q$. Su bisectriz será la traza B'_2 del plano bisector; conoceremos inmediatamente su traza B_2 , paralela a i_2 . Utilizando el punto m en que corta a la línea de tierra L_1-T_1 , conseguiremos su nueva traza vertical: $B'_1 = m-v'_1$, que corta en el punto n a la primitiva línea de tierra, dando lugar a la traza horizontal en el sistema primitivo: $B = n-h$, por el hecho de que el plano bisector contiene la intersección $i-i'$.

En el sistema axonométrico no cabe cambiar de plano, puesto que toda proyección sobre el plano de representación ha de ser ortogonal, y, por tanto, cualquier otro plano paralelo a π que se eligiera, nos proporcionaría una proyección idéntica a la primitiva cuando se hagan coincidir los dos planos π y π' con el del dibujo.

CAMBIO DE LOS ELEMENTOS DE PROYECCION EN EL SISTEMA CONICO

1.º *El plano del cuadro se desplaza paralelamente a sí mismo.* (Figura 417.) Se trata de conseguir las nuevas proyecciones de una figura (en este caso un triángulo $(A)-(B)-(C)-(a)-(b)-(c)$), sobre un plano del cuadro π_1 , paralelo al primitivo π , partiendo del conocimiento de sus proyecciones $A-B-C$ y $a-b-c$ sobre dicho plano π ; es decir, que vamos a relacionar las proyecciones primitivas de la forma $(A-B-C-a-b-c)$ con las nuevas $(A_1-B_1-C_1-a_1-b_1-c_1)$.

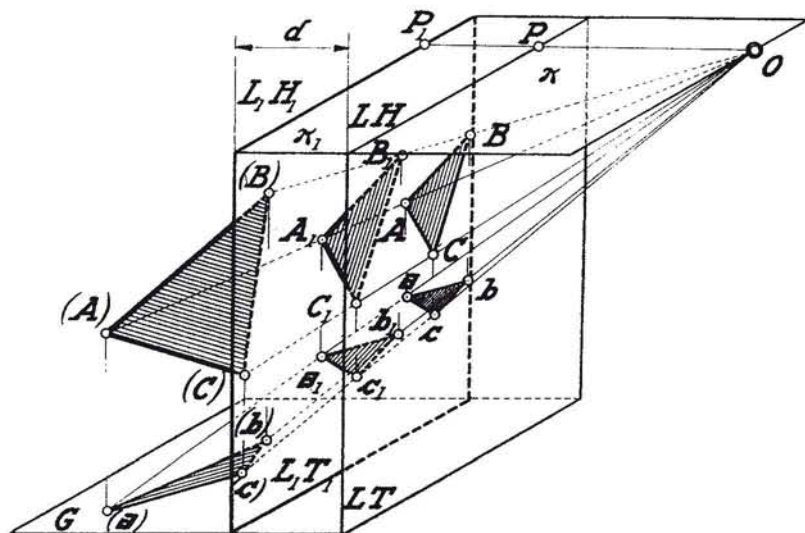


Fig. 417.—Cambio paralelo del plano del cuadro en el sistema cónico.

Es indudable que las condiciones de la proyección han cambiado, puesto que al alejarse el plano del cuadro paralelamente a π , ha aumentado la distancia del centro de proyección en $d = O-P_1 - O-P$, siendo P_1 el punto principal con respecto al nuevo sistema.

Fácilmente se comprende que siendo única la radiación producida al proyectar los distintos puntos $(A)-(B)-(C)$ desde el centro O , la proyección que se busca, $A_1-B_1-C_1$, resulta ser homotética de la conocida $A-B-C$, por ser secciones paralelas de una misma radiación, siendo O su centro de homotecia.

Al proyectar todo el conjunto ortogonalmente sobre el plano del dibujo coincidente con π , por ejemplo, las figuras $A-B-C$ y $A_1-B_1-C_1$ seguirán siendo homotéticas, y su centro de homotecia será la proyección ortogonal de O , es decir, el punto P confundido con P_1 .

Esto se pone de manifiesto en la figura 418, donde existe la forma $A-B-C$ de proyección horizontal $a-b-c$.

Para establecer la relación de homotecia, necesitaremos saber cuál es la nueva posición de un punto cualquiera tal que A_1 en el nuevo sistema cónico, y esto lo conseguimos recordando lo dicho a propósito de las figuras 313, 314, 315 y 316, en que, dado un sistema cónico, se sitúa un punto por sus tres coordenadas. Para ello empezaremos por determinar las correspondientes al punto en cuestión $A-a$ en el

sistema primitivo: $LT-LH-P-D$, y que son las ya conocidas: $X_A-Y_A-Z_A$.

Con relación al nuevo sistema: $L_1T_1-L_1H_1-P_1-D_1$, el punto considerado tendrá las mismas coordenadas X_A y Z_A , por no haber variado sus distancias al plano principal y al plano geométral. Su alejamiento al plano del cuadro habrá disminuido en el segmento d , distancia que separa el plano π del nuevo plano π_1 : $d = D-D_1$, por lo que, situado el punto Q_{A-1}

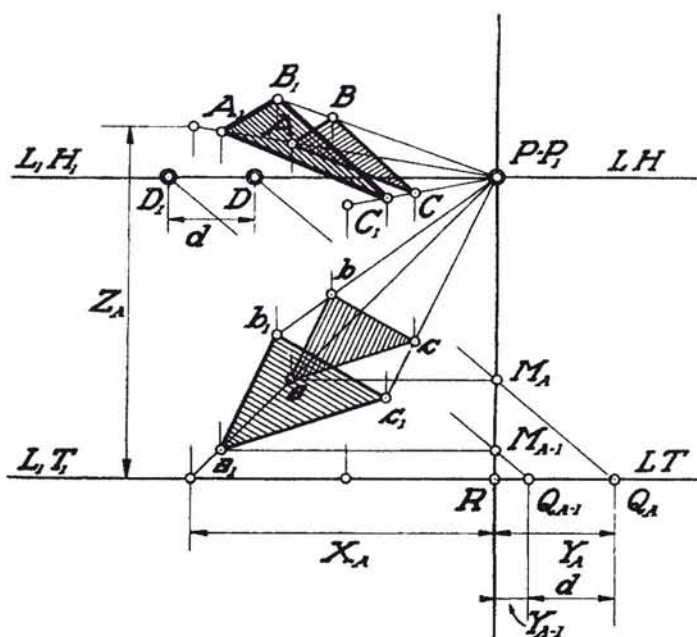


Fig. 418.—Sistema cónico: Cuando el plano del cuadro se des-
plaza paralelamente, las nuevas proyecciones directa y horizontal
son homotéticas de las primitivas.

de abscisa $Y_{A-1} = Y_A - d$ unido con D_1 , nuevo punto de distancia, nos proporciona el punto M_{A-1} , que nos permitirá hallar la nueva proyección horizontal a_1 del punto en cuestión, que se referirá en A'_1 sobre la recta $\overline{P-A}$.

También las proyecciones horizontales $a-b-c \rightarrow a_1-b_1-c_1$ son homotéticas por la misma razón.

Con el conocimiento de la relación de homotecia de las dos figuras en cuestión se pueden completar sus nuevas proyecciones: $A_1-B_1-C_1$ y $a_1-b_1-c_1$.

Esto nos conduce a la determinación de la nueva proyección de un conjunto del espacio, descomponiéndolo en tantas figuras planas como para ello fuere preciso, sabiendo que todas ellas se proyectan homotéticamente en estos dos sistemas cónicos, y con la misma relación de homotecia hallada anteriormente.

2.º El centro se aleja en dirección ortogonal al plano del cuadro. (Figura 419.) Sea la figura $(A)-(B)-(C)-(a)-(b)-(c)$, de la cual se obtiene su proyección directa $\overline{A-B-C}$, tratándose de lograr la nueva proyección cónica cuando el centro O ocupa la posición O_1 , es decir, habiéndose alejado del plano del cuadro y en su perpendicular $O-P$ un segmento de magnitud d . En este caso, la radiación es distinta, puesto que siendo fijos los puntos del espacio $(A)-(B)-(C)$, ha cambiado el centro de la misma.

Sin embargo, las secciones producidas por el mismo plano π en estas dos radiaciones son homológicas, puesto que, como sabemos, ambas lo

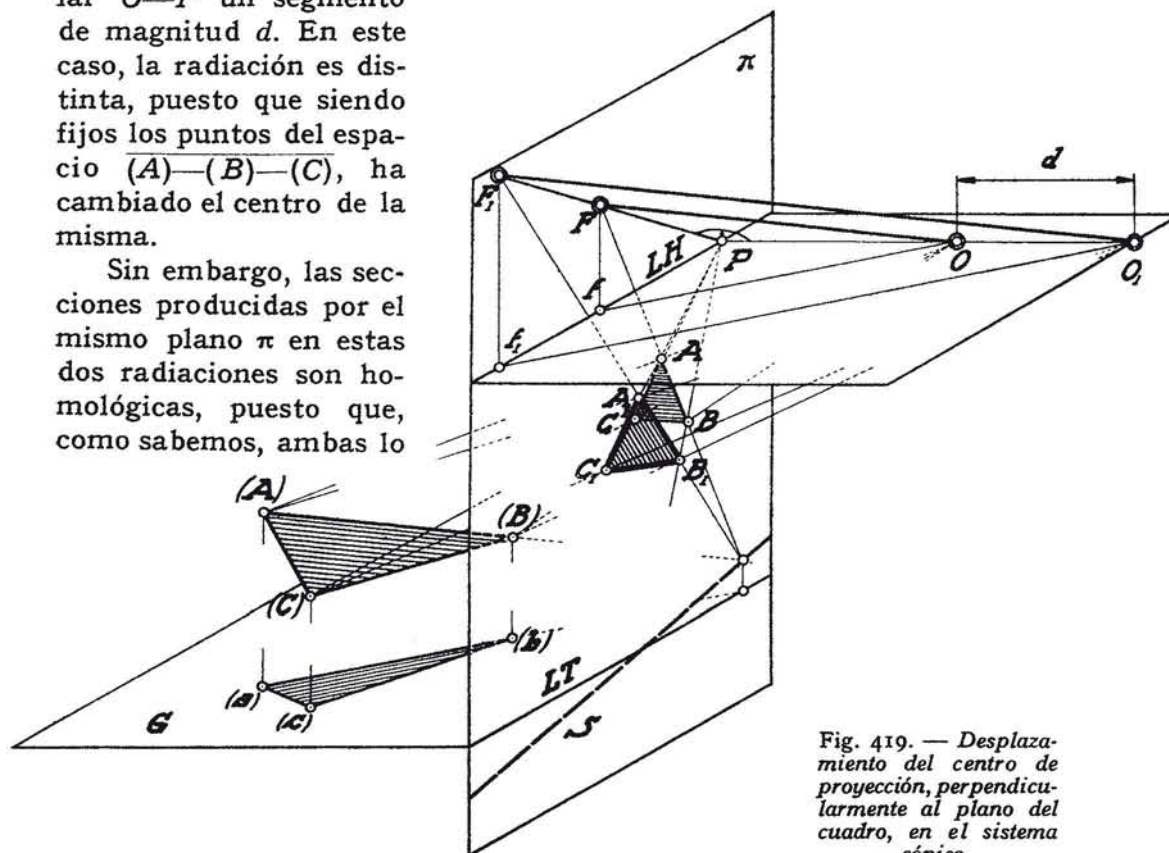


Fig. 419. — Desplazamiento del centro de proyección, perpendicularmente al plano del cuadro, en el sistema cónico.

son de la del espacio $(A)-(B)-(C)$ con respecto al mismo eje, que es la traza S del plano de la figura. Por consiguiente, al proyectar el conjunto sobre el plano del cuadro seguirán siendo homológicas en el sistema caracterizado por el punto principal P como centro de homología y la traza S como eje.

Es de notar la situación relativa que ocupan los puntos de fuga $F-f$ y F_1-f_1 de una misma dirección, pues F y F_1 se hallan en línea recta con P , y lo mismo sucede con f y f_1 , por la razón de que se forman dos triángulos, $\overline{F-O-f}$ y $\overline{F_1-O_1-f_1}$, que son homotéticos con centro en P al ser sus planos paralelos por construcción y serlo también sus rectas; es decir, que hemos formado un triedro de aristas: $\overline{P-O-O_1}$, $\overline{P-f-f_1}$ y $\overline{P-F-F_1}$.

El nuevo sistema estará integrado por: $LT-LH-P-D_1$. La nueva posición del centro O viene indicada por D_1 , con lo cual quiere decirse que se ha alejado el segmento d ortogonalmente a π , permaneciendo fijos los demás elementos constitutivos del sistema.

Fig. 420. — Sistema cónico: Cuando el centro de proyección se desplaza perpendicularmente al plano del cuadro, las nuevas proyecciones directa y horizontal son homológicas de sus correspondientes primitivas.

Con tal motivo, si la recta $\overline{A-B}$ fuga en F , la recta $\overline{A_1-B_1}$ fugará en F_1 , pasando ambas por el punto doble del eje M , viniendo determinados los puntos A_1 y B_1 sobre las rectas $\overline{P-A}$ y $\overline{P-B}$, respectivamente. Con esto queda ya indicado el camino para obtener tantos puntos como se desee en esta nueva transformación.

— 264 —

3.º El centro de proyección del sistema cónico se desplaza paralelamente al plano del cuadro. (Fig. 421.) Esto quiere decir que el punto O se mantiene en el plano de desvanecimiento Δ , y ocupa una posición tal que O_1 , correspondiente a un desplazamiento de longitud d y en la dirección que se indica.

Supongamos que se trata de la figura $(A)-(B)-(C)-(a)-(b)-(c)$. La intersección de las dos radiaciones que se producen en el plano del cuadro $\overline{A-B-C}$ y $\overline{A_1-B_1-C_1}$ están relacionadas, como sabemos, de

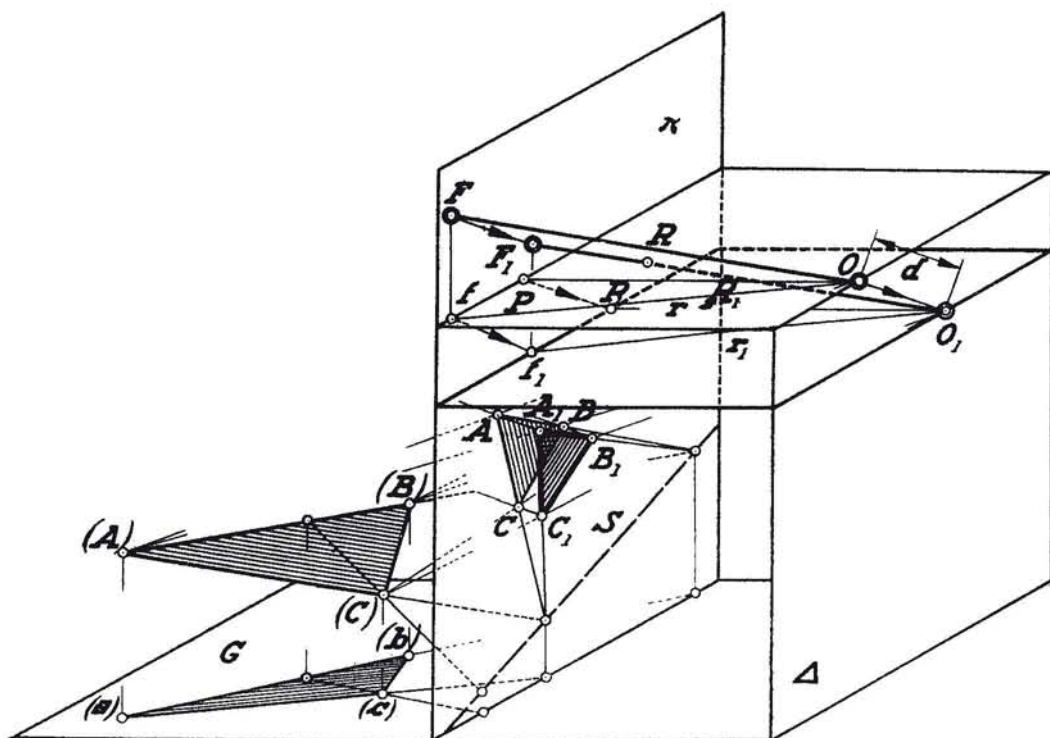


Fig. 421. — Desplazamiento del centro de proyección en el plano de desvanecimiento del sistema cónico.

tal forma, que por ser homológicas ambas de la $(A)-(B)-(C)$ con respecto a un mismo eje, que es la traza S del plano de la figura y centros $O-O_1$, son afines entre sí las dos figuras en cuestión, como consecuencia de hallarse su centro en el plano π que las contiene, y también en la recta $O-O_1$. Esto nos indica que será el punto impropio de dicha recta $O-O_1$.

Los puntos de fuga $F-F_1$ y $f-f_1$ de una recta cualquiera estarán desplazados en el segmento d en magnitud y dirección, y lo mismo sucederá con los puntos principales: P y P_1 .

Con todo esto tenemos elementos suficientes para resolver el problema en el plano de representación, como lo indica la figura 422, donde se tiene la forma $\overline{A-B-C}$ — $\overline{a-b-c}$ situada en un sistema cónico determinado por: $LT-LH-P-D$, consistiendo el problema en hallar la nueva proyección de esta figura en un sistema definido por $LT-L_1H_1-P_1-D_1$.

El desplazamiento del centro de proyección se ha verificado en un segmento de longitud d y en la dirección y sentido $\overline{D-D_1}$ o $\overline{P-P_1}$.

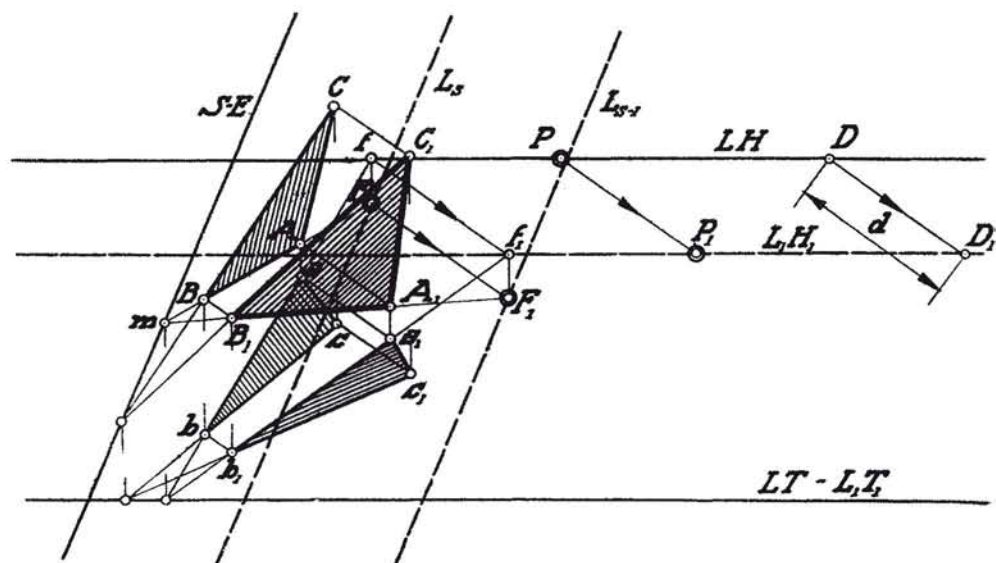


Fig. 422. — Sistema cónico: Cuando el centro de proyección se desplaza en el plano de desvanecimiento, las nuevas proyecciones resultantes son afines de las primitivas.

El eje de afinidad que nos va a relacionar las dos formas $\overline{A-B-C}$ y $\overline{A_1-B_1-C_1}$ es la traza S del plano que contiene estos tres puntos, y la obtención de un par de puntos afines se consigue con la de una recta, por ejemplo, $\overline{A-B}$, que fuga en $F-f$, y sabiendo que F_1 está trasladado en la longitud d y en el sentido y dirección $\overline{P-P_1}$, es decir, ocupa la posición F_1-f_1 . Siendo doble el punto m del eje, conseguimos la recta afín donde se hallarán los puntos A_1 y B_1 , respectivamente, afines de A y B , obtenidos al trazar por éstos las paralelas a la dirección de afinidad.

De la misma forma se obtendrán tantos puntos como se deseen de la forma plana de que se trate.

En cuanto a las proyecciones horizontales $\overline{a-b-c}$ y $\overline{a_1-b_1-c_1}$, éstas serán también afines con la misma dirección de afinidad; pero siendo, como es lógico, su eje: $\overline{L-T}$.

4.º El plano geometral se desplaza paralelamente a sí mismo. (Figura 423.) La forma del espacio $(A)-(B)-(C)-(D)-(E)$ se proyecta en el nuevo plano geometral G_1 según $(a_1)-(b_1)-(c_1)-(d_1)-(e_1)$. El cambio consistirá en hallar la nueva proyección $a_1-b_1-c_1-d_1-e_1$ en función de las conocidas $A-B-C-D-E$ y $a-b-c-d-e$.

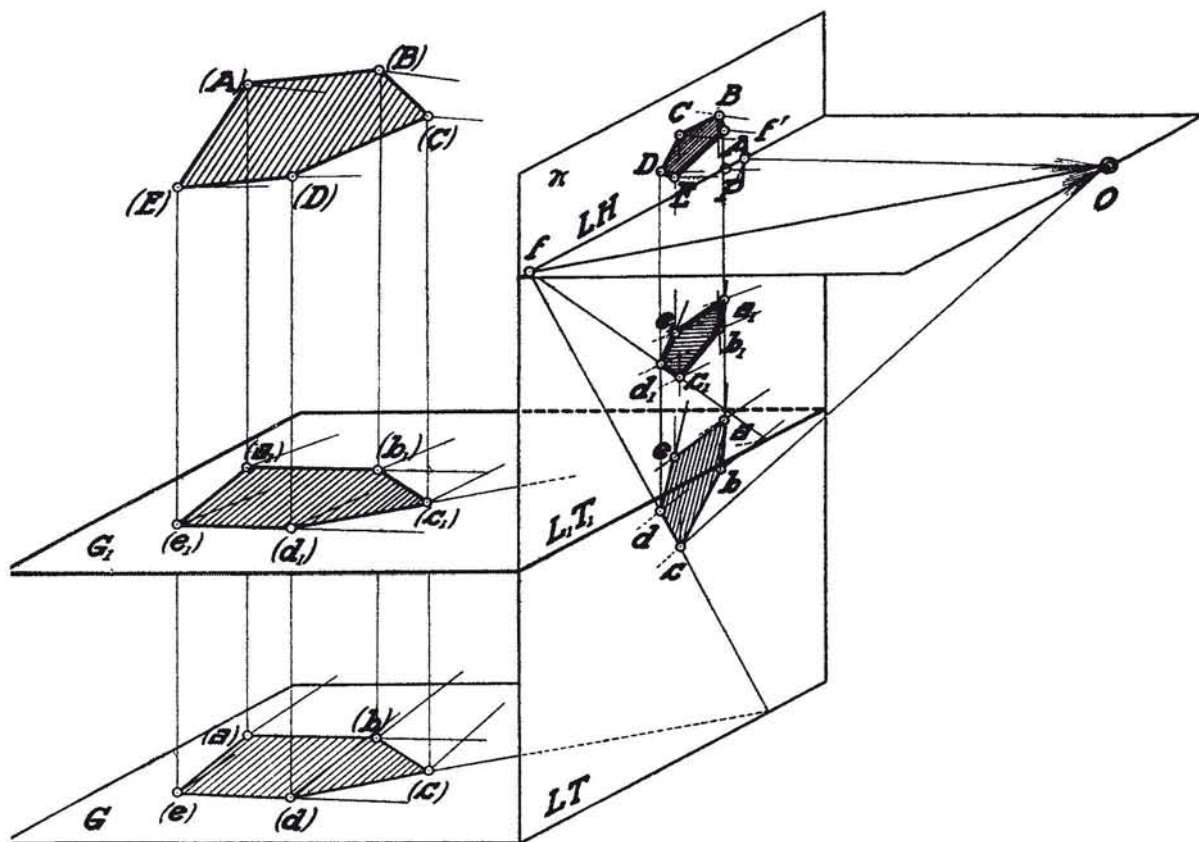
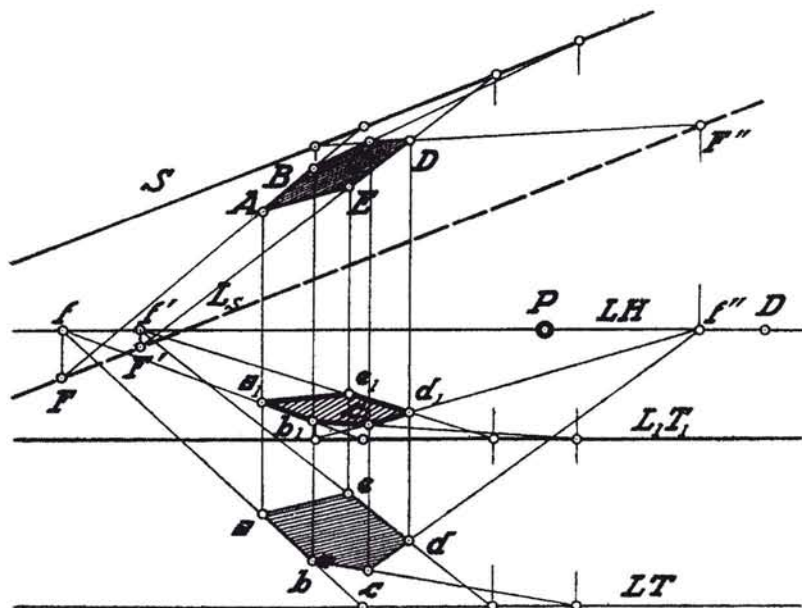


Fig. 423. — Cambio paralelo del plano geometral en el sistema cónico.

Basta observar que las rectas horizontales $(a)-(b)$, $(d)-(c)$ del plano G son paralelas a las $(a_1)-(b_1)$, $(d_1)-(c_1)$ del plano G_1 cambiado y, por tanto, fugarán en los mismos puntos $f'-f$ de la línea de horizonte. Además, los puntos correspondientes $(a)-(a_1)$, $(b)-(b_1)$... que en el espacio se hallan en las proyectantes de $(A)-(B)$... se proyectarán en el plano π sobre perpendiculares a LH . Y, como consecuencia, las dos formas $a-b-c-d-e$ y $a_1-b_1-c_1-d_1-e_1$ serán afines, teniendo por eje de afinidad la línea de horizonte: LH .

En la figura 424, dada la forma $A-B-C-D-E-a-b-c-d-e$ en el sistema: $LT-LH-P-D$, se ha hallado la $a_1-b_1-c_1-d_1-e_1$ en función de esta última en el sistema: $L_1T_1-LH-P-D$, resolviendo



la afinidad de dirección perpendicular a LH y siendo dobles los puntos $f-f'-f''$ de la misma, o sea de su eje, partiendo de la determinación de un par de puntos afines: $a-a_1$, por ejemplo.

GIROS

Fig. 424. — Sistema cónico: Cuando se desplaza el plano geometral paralelamente a sí mismo, la nueva proyección horizontal es afín de la primitiva.

Giro de un punto. (Fi-

gura 425.) Cuando un punto A gira alrededor de una recta E , describe una circunferencia c cuyo plano S es perpendicular a dicha recta, que se llamará eje. Esta circunferencia tendrá por centro O el punto secante del plano S con el eje, y el radio $\rho = O-A$ será la distancia del punto A al eje E ; por tanto, para hallar la nueva posición de un punto después de su giro alrededor de una recta E , en un sentido determinado y de una magnitud α , bastará trazar, a partir de la posición inicial del punto A , un arco de círculo de las características anteriormente apuntadas y de amplitud α , para así conseguir su nueva posición girada A_1 .

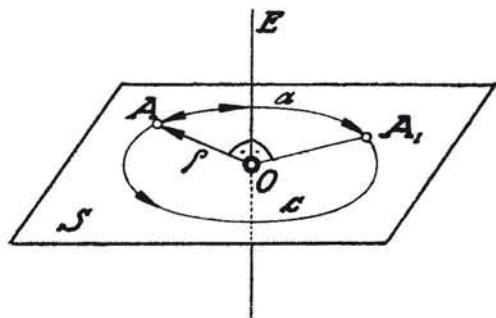


Fig. 425. — Giro de un punto alrededor de un eje que no pasa por él.

Con este sencillo conocimiento podemos efectuar tantas operaciones como nos sean precisas al utilizar este artificio de los giros, según hemos esbozado al principio de este capítulo.

Para que se aprecie el resultado obtenido empleando los giros, la figura 426 nos indica, por ejemplo, que un cubo $C-c-c'$ cuya posición inicial en el sistema diédrico $H-V$ es tal que sus caras son paralelas a ellos, después de dos giros, uno alrededor del eje E_1 , perpendicular al plano horizontal ($C_1-c_1-c'_1$), y otro alrededor del eje E_2 de punta con respecto al plano vertical ($C_2-c_2-c'_2$), nos proporciona una proyección c_2 donde se aprecian conjuntamente las tres direcciones principales, es decir, las tres aristas del cubo convergentes en su vértice. Como consecuencia, si una figura estuviere solidariamente unida a este

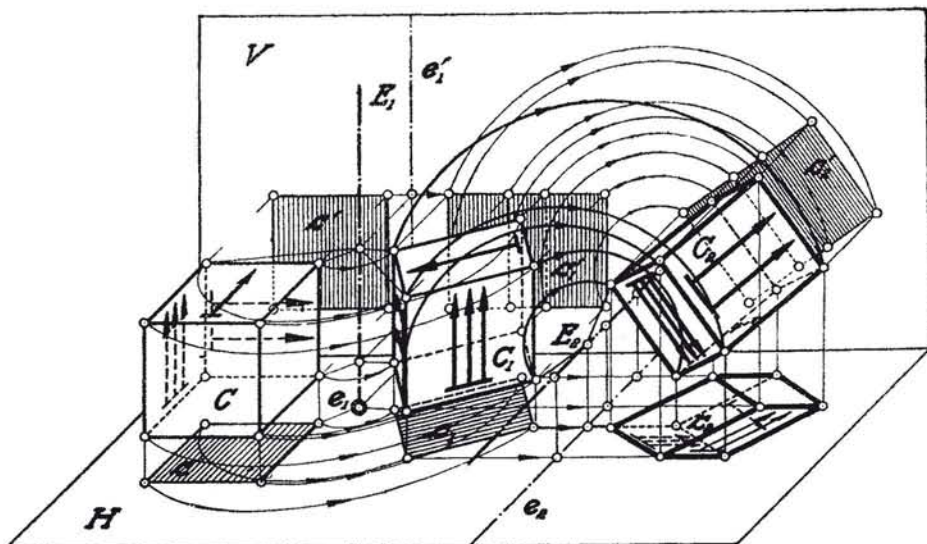


Fig. 426.—Mecanismo y fundamento de los giros en el sistema diédrico.

cubo y proyectada en el espacio sobre tres de sus caras no paralelas, llegaríamos, después de utilizar el artificio indicado, a obtener una proyección directa del conjunto de las del espacio que nos diera una sensación exacta de su posición relativa, en forma análoga a lo que decíamos al hablar del sistema axonométrico.

Aunque esta no sea la finalidad directa del giro, apreciaremos la utilidad de emplearlo para resolver muchos problemas con mayor sencillez que con el procedimiento directo; por ejemplo, se puede lograr, según se aprecia en la figura 427, el que, mediante un giro alrededor de un eje de punta $E-E'$, en este caso con respecto al plano horizontal, una recta cualquiera $r-r'$ se sitúe paralela al plano vertical.

El eje corta en este caso a la recta en el punto $b-b'$, que, como ya sabemos, permanecerá invariable para cualquiera de las posiciones de la recta en su giro; y recordando lo dicho a propósito de la figura 425,

elegido un punto $a—a_1$ de la recta, éste describe un círculo de plano perpendicular al eje, es decir, el horizontal H'_1 , que se proyectará en verdadera magnitud en proyección horizontal. Podrá ocupar el punto una posición tal que a_1 después de un giro α , siendo, como consecuencia, r_1 la posición de la recta en proyección horizontal. La nueva proyección vertical del punto, después del giro, es a'_1 , puesto que al permanecer en el plano H'_1 , pertenecerá a su traza, o sea se desplazará sobre una paralela a la línea de tierra trazada por a' ; uniendo b'_1 (que

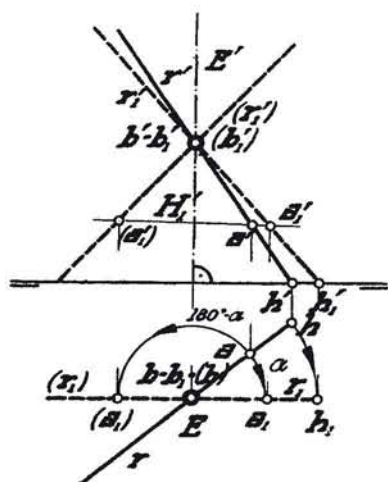


Fig. 427. — Sistema diédrico: Mediante un giro, una recta cualquiera se convierte en frontal. 1.º caso: El eje corta a la recta.

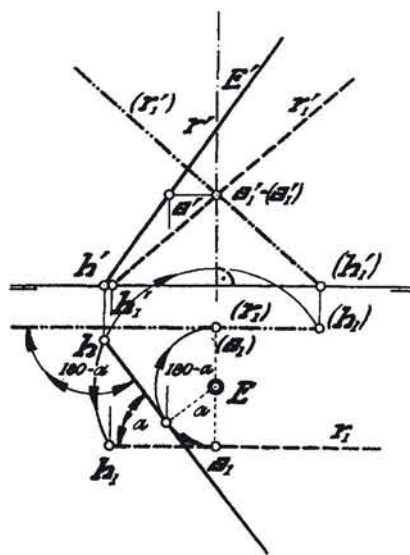


Fig. 428. — Sistema diédrico: Mediante un giro, una recta cualquiera se convierte en frontal. 2.º caso: El eje se cruza con la recta.

es también b') con a'_1 , tenemos la posición girada de la recta en $r_1—r'_1$; es decir, que se ha colocado frontal con respecto al sistema.

También pudiera haber descrito la recta el ángulo suplementario en sentido contrario, y el punto $a—a'$ hubiera ocupado la posición $(a_1)—(a'_1)$, con lo que su nueva posición resultaría simétrica respecto al eje; es decir: $(r_1)—(r'_1)$.

A veces nos será más cómodo elegir como punto de la recta su traza horizontal $h—h'$, pues ésta seguirá permaneciendo en el plano horizontal.

Cuando, como en el caso de la figura 428, el eje de giro no corte a la recta, también se puede lograr el situarla paralela al plano vertical, teniendo presente que se puede fijar su posición r_1 o (r_1) , por ser la tangente paralela a la línea de tierra al círculo de centro E y radio $\overline{E—a}$. Dicho círculo será el descrito por el extremo a de la perpendicular

común al eje y a la recta (véase fig. 341), debiendo utilizar además otro punto tal que el $h-h'$, traza horizontal de la recta, para que quede así definida su proyección vertical según r' , o (r'_1) .

La posición r_1 corresponde al giro de α , y (r_1) al de su suplementario.

Obsérvese que el ángulo α girado por el punto a hasta su posición a_1 es el mismo que media entre las dos posiciones inicial y final de la recta $r-r_1$.

Mediante un giro, una recta paralela a un plano de proyección se coloca de punta. (Fig. 429.) Si la recta $r-r_1$ es frontal como en este

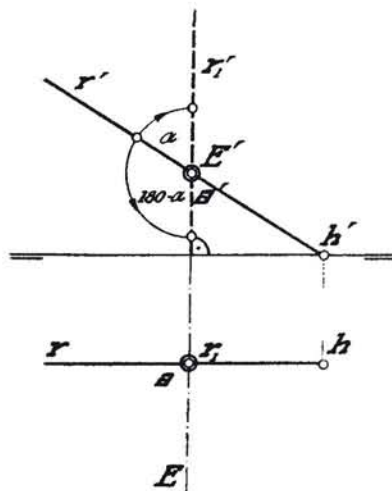


Fig. 429.—Con un giro, una recta frontal se sitúa de punta: 1.º caso: El eje de giro corta a la recta.

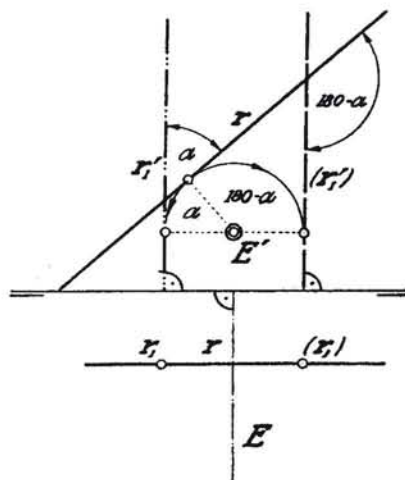


Fig. 430.—Con un giro, una recta frontal se coloca de punta: 2.º caso: El eje de giro se cruza con la recta.

caso, el eje que se elige $E-E'$ habrá de ser perpendicular al plano vertical; y si además corta a la recta en el punto $a-a'$, bastará hacerla girar el ángulo α para que ocupe la posición indicada y ser de punta con respecto al plano horizontal, lo cual se comprueba gráficamente al observar que todos sus puntos, tales como el $h-h'$, ocupan, después de dicho giro, una posición confundida con r_1 , nueva proyección horizontal de la recta.

Figura 430. En las mismas condiciones, es decir, siendo la recta $r-r'$ paralela al plano vertical, pero no teniendo ningún punto común con el eje $E-E'$, también se logra el que ocupe una posición de punta con respecto al plano horizontal, pues bastará hacerla girar el ángulo α manteniendo su distancia al eje constante, es decir, viniendo a ocupar la posición $r_1-r'_1$. También en este caso, como en el anterior, la recta puede hacerse girar el ángulo suplementario del α para ocupar la $(r_1)-(r'_1)$.

Mediante un giro alrededor de un eje de punta se consigue que un plano cualquiera se transforme en un plano proyectante. (Fig. 431.)

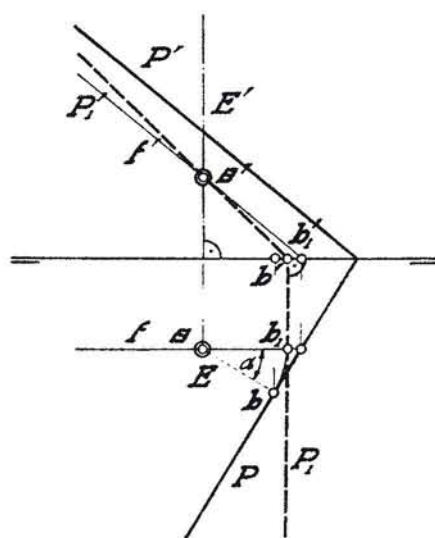


Fig. 431. — Mediante un giro, un plano cualquiera se convierte en proyectante.

Sea $P-P'$ el plano que se va a hacer girar alrededor del eje $E-E'$ de punta con respecto al plano horizontal.

La traza P , por estar situada en un plano perpendicular al eje, seguirá manteniéndose en el horizontal de proyección para cualquiera de sus posiciones y, por tanto, podemos ya situarla en P_1 , perpendicular a la línea de tierra, eligiendo su punto $b-b'$, que viene a ocupar la posición $b_1-b'_1$ después de haber girado el ángulo α .

Por tener la nueva posición del plano su traza P_1 normal a la línea de tierra, queda ya caracterizado por ser proyectante vertical. Para conseguir su nueva traza vertical P'_1 bastará, pues, obtener la proyección vertical de uno cualquiera de sus puntos en su nueva posición, ya que habrá de pasar por b'_1 . Para ello, en vez

de elegir un punto cualquiera del plano, tomaremos el de su intersección con el eje, el cual sabemos no varía de posición. Este punto es el $a-a'$, obtenido utilizando la frontal $f-f'$.

En definitiva, se ha logrado que el plano sea $P_1-P'_1$, posición que emplearemos con ventaja en la resolución de algunos problemas.

Mediante un giro, un plano proyectante se coloca paralelo a uno de proyección. (Figura 432.) Supongamos que se trata del plano proyectante $P-P'$, que por serlo con respecto al vertical, nos obligará a tomar como eje $E-E'$ una recta de punta con respecto a dicho plano, ocupando su traza la posición P'_1 después de girar el ángulo α , si es que, como en este caso, el eje es una recta del plano en cuestión.

Cuando dicho eje sea paralelo al plano que se trata de girar, cual es el caso representado en la figura 433, entonces se obtienen las posiciones P'_1 y (P'_1) después de un giro del

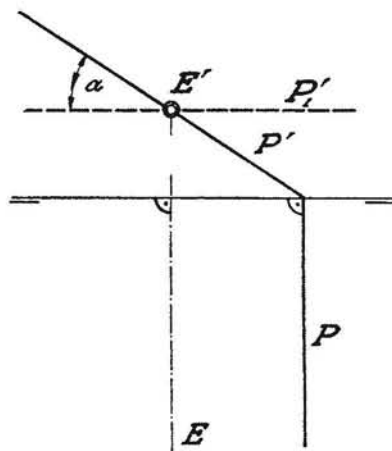


Fig. 432. — Un plano proyectante se sitúa paralelo a uno de los de proyección mediante un giro: 1.º caso: El eje de giro está situado en el plano.

ángulo α o de su suplementario, manteniéndose a igual distancia que P' del eje $E-E'$; es decir, siendo las trazas citadas P'_1 o (P'_1) las tangentes trazadas paralelas a la línea de tierra a la circunferencia descrita por el punto a' .

Mediante dos giros, una recta cualquiera se coloca de punta con respecto a un plano de proyección. (Fig. 434.) Esto es un resumen de lo ya expuesto en relación con las figuras 427 y 428; es decir, la combinación de los dos giros: uno alrededor de un eje $E_1-E'_1$, perpendicular al plano horizontal, que nos coloca la recta $r-r'$ frontal con un giro α_1 en $r_1-r'_1$, y otro del eje $E_2-E'_2$, perpendicular al plano vertical, por el que esta frontal, y después del giro α_2 , viene a situarse en la forma deseada; es decir, de punta con respecto al plano horizontal: $r_2-r'_2$.

Estas operaciones, con la misma nomenclatura, se representan en la figura del espacio 435.

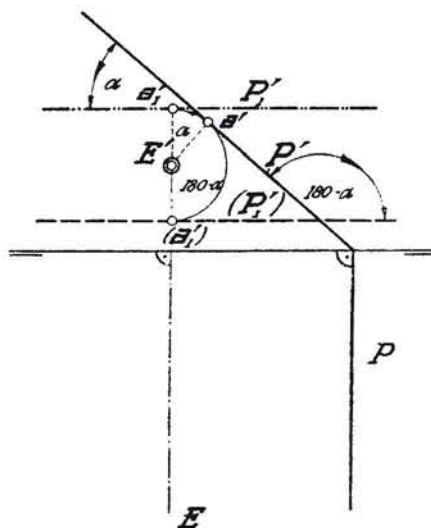


Fig. 433. — Un plano proyectante se coloca paralelamente a uno de proyección mediante un giro: 2.º caso: El eje de giro es paralelo al plano.

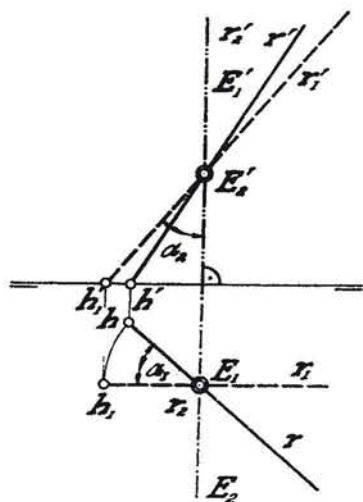


Fig. 434. — Con dos giros, una recta cualquiera se coloca de punta.

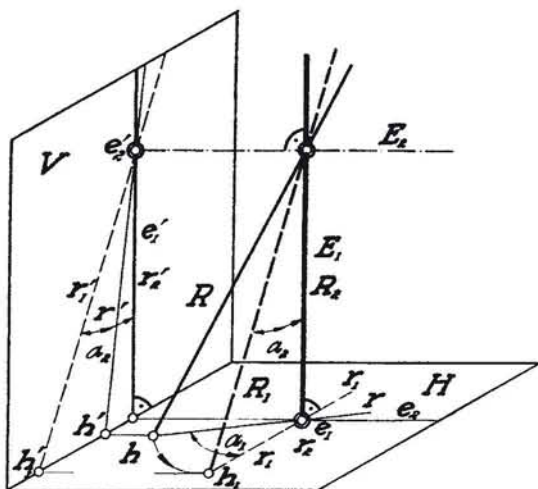


Fig. 435. — Dos giros son necesarios para situar una recta cualquiera de punta.

Mediante dos giros, un plano cualquiera se coloca paralelo a un plano de proyección. (Fig. 436.) También ahora se trata de combi-

nar los dos giros que por separado aparecen en las figuras 431 y 432.

Así, en la de referencia, el plano cualquiera $P-P'$ se coloca previamente como proyectante del plano vertical en $P_1-P'_1$, haciéndolo girar α_1 alrededor del eje de punta $E_1-E'_1$ con respecto al plano horizontal, para llegar, mediante el giro de valor α_2 de la traza P'_1 , alrededor del eje de punta con respecto al vertical $E_2-E'_2$, a ocupar la posición definitiva representada por su traza P'_2 , en que aparece, por tanto, como un plano paralelo al plano horizontal de proyección.

Estas posiciones, así como las de los ejes, quedan de manifiesto en la figura 437, donde se aprecian aquéllas después de sus dos giros:

α_1 alrededor del eje E_1 para colocarlo proyectante en (P_1) y del giro α_2 alrededor del eje E_2 para colocarlo en (P_2) paralelo al horizontal H de proyección.

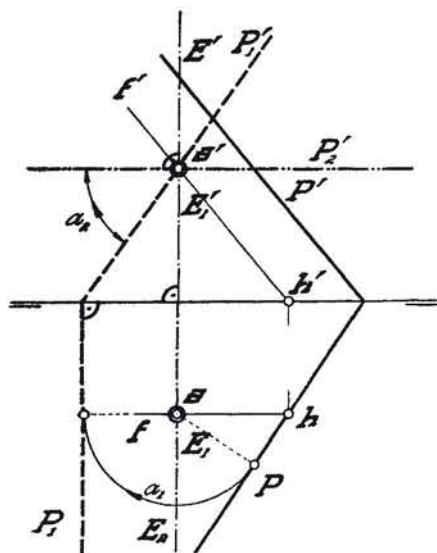


Fig. 436. — Con dos giros se sitúa un plano cualquiera paralelamente a uno de los de proyección.

GIROS ALREDEDOR DE UN EJE OBLICUO

Figura 438. Teniendo a la vista el movimiento del punto en su giro alrededor de un eje, tal y como aparece en la figura 425, habremos de resolver en el sistema de representación cuanto acontece en el espacio; y si, por ejemplo, se trata de hacer girar 90° el punto $a-a'$ alrededor de la recta cualquiera $E-E'$ tomada como eje, trazaremos por dicho punto en cuestión el plano $S-S'$, perpendicular a dicho eje, donde se habrá de encontrar el círculo que describe y que lograremos en verdadera magnitud abatiendo su plano. El centro

$o-o'$ será el punto de intersección del eje $E-E'$ con el plano $S-S'$, que aquí se ha logrado utilizando el plano proyectante horizontal de dicho eje.

Tomando S por charnela $Ch-Ch'$, el punto $a-a'$ es abatido en A_a y el $o-o'$ en O_a sobre el plano horizontal. Obtendremos las nuevas posiciones posibles del punto: A_{1-a} y A_{2-a} haciéndole girar 90° en los dos sentidos y a partir de A_a . Deshecho el abatimiento, utilizando el diámetro $A_{1-a}-O_a-A_{2-a}$ que tiene como punto doble h_2 de la charnela, lograremos en $a_1-a'_1$ y $a_2-a'_2$ las posiciones deseadas del punto.

Para obtener la proyección vertical del diámetro a_1-o-a_2 se ha utilizado el punto de la charnela h_2 , que se proyecta en h'_2 de Ch' .

Cuando se trate, como en el caso estudiado, de girar puntos aislados alrededor de un eje oblicuo, se podrá utilizar con ventaja el procedimiento expuesto; pero cuando sean muy numerosos los puntos que

se traten de girar, será conveniente a veces el modificar el sistema de representación mediante el artificio de los cambios, de tal manera, que se sitúe el eje de giro de punta con respecto a uno de los planos del nuevo sistema diédrico obtenido.

GIRO ELIPTICO

Hemos visto en la ya citada figura 425, que el punto describe una circunferencia en el plano normal al eje; pero si esta circunferencia se transformara en una elipse, el giro recibiría el nombre de giro elíptico, y entonces todos los puntos de un conjunto ligado a él describirían alrededor del mismo eje elipses homotéticas de planos paralelos entre sí.

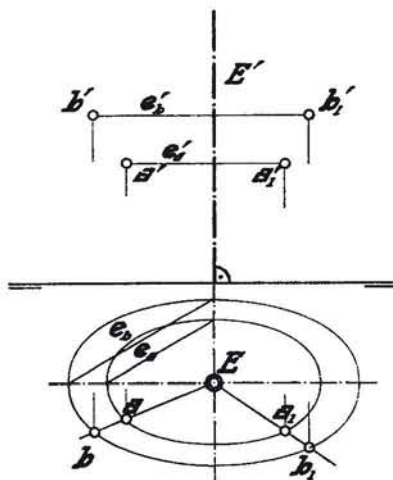


Fig. 439. — Giro elíptico.

Estas elipses se proyectarían homotéticas y concéntricas en proyección horizontal, como en el caso de la figura 439, si este eje es de punta con respecto a dicho plano, y nos será muy sencilla la determinación de la nueva posición de un punto después de un giro de esta naturaleza, efectuando una construcción de homotecia que ya conocemos.

Tiene aplicación el giro elíptico cuando tratemos de las cuádricas, como veremos en el Tomo II de esta obra, a fin de generalizar las demostraciones y las construcciones.

Haciendo extensivo el concepto de giro elíptico, asimismo podríamos conseguir, aunque ello parezca paradójico, el giro parabólico y el giro hiperbólico; es decir, que así como en el caso presente los puntos describen elipses homotéticas de planos paralelos cuyos centros se proyectan confundidos según un plano perpendicular al eje, en los otros, los puntos del conjunto describirían parábolas o hipérbolas homotéticas de planos paralelos.

Aplicaciones de los giros.

Problema 1.^o *Determinación de la mínima distancia entre dos rectas que se cruzan.* (Fig. 440.) Sean las rectas $r-r'$ y $s-s'$. Vamos a situar una de ellas de punta con respecto a uno de los planos de proyección, para que se encuentren en la misma posición relativa que en la figura 341 y en la figura 414.

Para ello elegiremos el eje $E_1-E'_1$ para colocar la recta $r-r'$ primeramente frontal en la posición $r_1-r'_1$. El punto $a-a'$ pertenece al eje y es, por tanto, punto doble de las dos posiciones; es decir, será también $a_1-a'_1$. Ha girado esta recta el ángulo α_1 en el sentido indicado, y la recta $s-s'$ ocupa la posición $s_1-s'_1$ después de haber girado el mismo ángulo y en el mismo sentido, para lo cual se han utilizado los puntos $b-b'$ y $h_s-h'_s$.

Mediante el giro del conjunto de las dos rectas alrededor del eje $E_2-E'_2$ de punta con respecto al plano vertical,

la recta $r_1-r'_1$ ocupará la posición $r_2-r'_2$, después de girar el ángulo α_2 en el sentido que se indica, y $s_1-s'_1$ vendrá en $s_2-s'_2$.

Aparece entonces en proyección horizontal la mínima distancia, es decir, la perpendicular común D_2 limitada por los puntos $f_2-f'_2$ y $d_2-d'_2$. Las proyecciones verticales de estos puntos: f'_2 y d'_2 , se hallan en una misma paralela a la línea de tierra.

Deshecho el giro de estos dos puntos, ocupan la posición f'_1 y d'_1 en proyección vertical, y f_1 y d_1 en la proyección horizontal sobre paralelas a la línea de tierra que parten de f_2 y d_2 , respectivamente, siendo entonces D_1 la proyección horizontal de la mínima distancia que, girada el ángulo α_1 en sentido contrario al primitivo alrededor del eje $E_1-E'_1$, nos da la posición verdadera $D-D'$ de dicha perpendicular común.

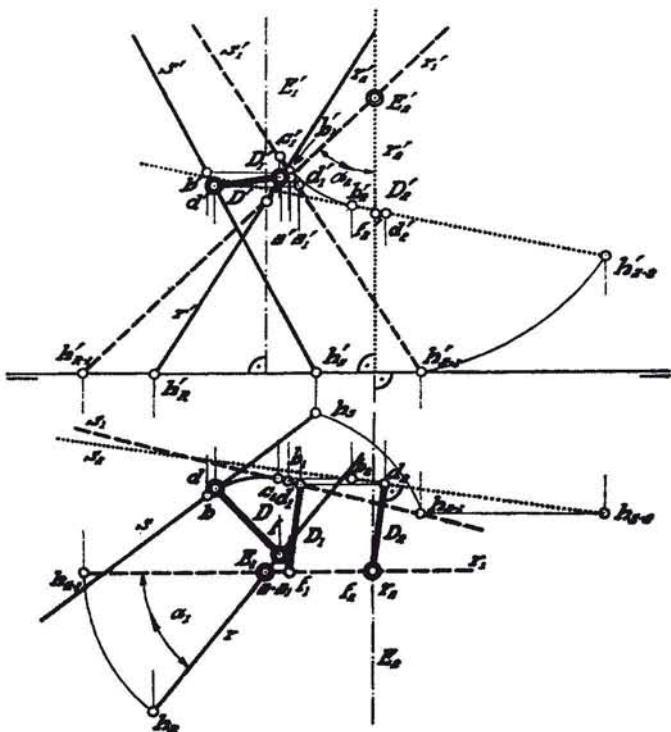


Fig. 440. — Aplicaciones de los giros: Determinación de la mínima distancia entre dos rectas que se cruzan en magnitud y posición.

Problema 2.º *Determinar el plano bisector de un diedro utilizando los giros.* (Fig. 441.) Los planos dados son $P-P'$ y $Q-Q'$. Vamos a situar la intersección de estos dos planos de punta con respecto a uno de los planos de proyección mediante dos giros para que quede en una posición análoga a la que, por medio de los cambios de los planos de proyección, hemos conseguido en la figura 416. Empezaremos, por tanto, por hallar la intersección de estos dos planos $i-i'$, y la haremos girar previamente el ángulo α_1 hasta situarla frontal utilizando

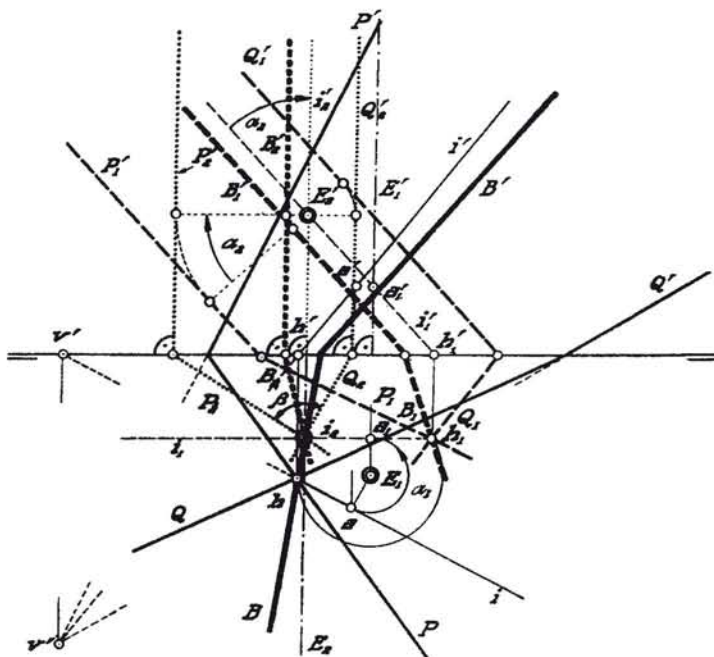


Fig. 441. — Aplicación de los giros a la determinación del plano bisector de un diedro.

como eje el $E'-E'_1$, para lo cual hemos utilizado su punto $a-a'$, que viene en $a_1-a'_1$, y su traza horizontal $h-h'$, que ocupa la posición $h_1-h'_1$. Así obtenemos su nueva posición: $i_1-i'_1$.

Los planos, después de este giro, son P_1 y Q_1 , que por contener la misma frontal, tendrán por trazas verticales las rectas P'_1 y Q'_1 , paralelas a i'_1 .

Utilizando ahora el eje de punta con respecto al plano vertical $E_2-E'_2$, situaremos la intersección en la posición $i_2-i'_2$, después del giro α_2 en el sentido indicado. Las trazas de los planos arrastradas en este giro habrán ocupado las posiciones P'_2 y Q'_2 , correspondiéndoles como nuevas trazas horizontales las P_2 y Q_2 , respectivamente, por

haber de pasar por el punto i_2 , proyección de la intersección. El ángulo de estas dos trazas $\overline{P_2-Q_2}$ será β , medida del diedro en cuestión, y su bisectriz será B_2 o, lo que es lo mismo, la traza del plano bisector de este diedro, a la cual ha de corresponder la traza vertical B'_2 .

Repitiendo las construcciones hechas anteriormente, pero en sentido inverso, conseguimos la posición del plano bisector $B-B'$ en relación con los datos.

Problema 3.º Girar una recta R alrededor de otra, paralela a una dirección dada S , hasta situarla en un plano P conocido. (Fig. 442.)

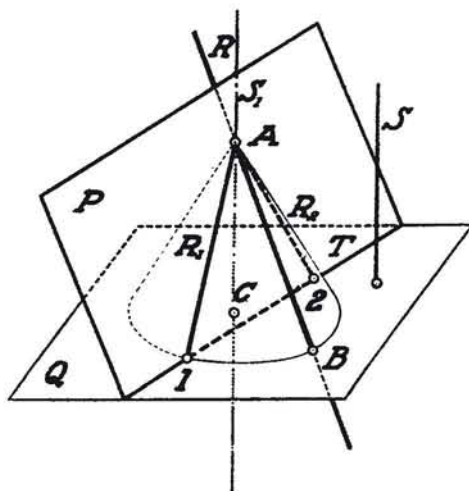


Fig. 442. — Hacer girar una recta alrededor de otra paralela a una dada, hasta que venga a colocarse en un plano conocido.

Sean R la recta, S la dirección y P el plano; el problema se resolverá de la siguiente forma:

Hallado el punto A de intersección de la recta R con el plano P , trazaremos por él la recta S_1 paralela a la dirección dada, y entonces efectuaremos el giro de la recta alrededor de S_1 tomada como eje.

Esta recta describirá un cono de revolución cuya directriz será circular y situada en un plano Q perpendicular a S_1 , motivo por el cual habrán de determinarse los puntos comunes a la traza T del plano P con la circunferencia directriz del cono situada en el plano elegido Q , teniendo presente que esta circunferencia es la descrita por el giro del punto B alrededor del eje S_1 ; B es la intersección de la recta R con el citado plano Q .

Resolución del problema en el sistema diédrico. (Fig. 443.) Sean: la recta $r-r'$ y $P-P'$, el plano donde se ha de encontrar después de un giro alrededor de una recta paralela a la línea de tierra. Empecemos por hallar el punto A , común a la recta R y al plano P , para lo cual hemos utilizado el plano proyectante vertical de la recta; seguidamente tracemos por dicho punto $a-a'$ la recta $s_1-s'_1$ paralela a la línea de tierra que va a ser el eje de giro; elegido el plano $Q-Q'$ perpendicular al eje, que resulta ser de perfil, en él encontramos la traza

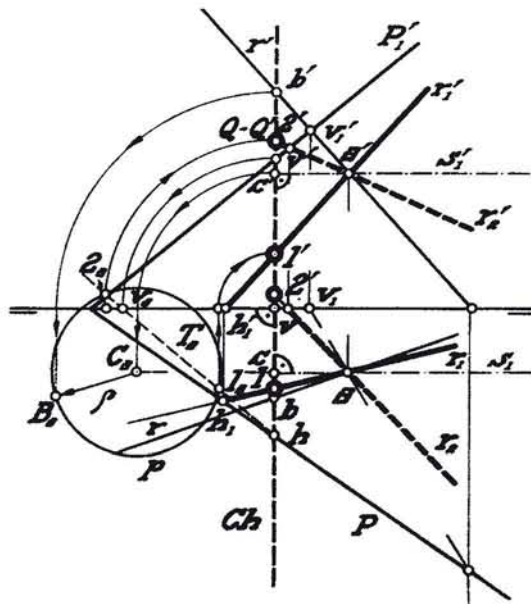


Fig. 443. — Realización del problema enunciado en la figura anterior.

de la recta $r-r'$ en su punto $b-b'$, y también el punto $c-c'$, centro del círculo descrito por él.

Tomando ahora como charnela la traza horizontal Q del plano, abatiremos dicho plano Q sobre el plano horizontal de proyección, y en él aparecerán los puntos B_a y C_a (se dibuja el círculo de radio $\rho = \overline{C_a-B_a}$). La traza del plano P con el plano Q es también una recta de perfil, en este caso caracterizada por sus trazas $h-h'$ y $v-v'$, la cual viene abatida en T_a , que nos proporciona los puntos de encuentro con la circunferencia: 1_a y 2_a . Deshecho su abatimiento, son los $1-1'$ y $2-2'$. Estos puntos, unidos ordenadamente con el $a-a'$, nos determinan las proyecciones de las rectas solución: $r_1-r'_1$ y $r_2-r'_2$, que son las dos

únicas posiciones que en este caso puede ocupar la recta R en el plano en las condiciones estipuladas en el enunciado.

Si la recta T fuera exterior a la circunferencia descrita por el punto B , no existiría solución posible; y si fuera tangente, solamente habría una solución del problema.

TRASLACIONES

Este artificio es un caso particular del giro en que el radio es ∞ . Por tanto, todos los puntos de un conjunto se encontrarán desplazados en la misma dirección, con idéntico sentido y en una longitud constante.

CAPITULO XII

TRIEDROS

Resolución del ángulo triedro en los seis casos.

Más que como utilidad directa, resolveremos el ángulo triedro en función de los datos que se especifican en el cuadro adjunto, como aplicación de los problemas resueltos hasta ahora, donde entrarán en juego ángulos de rectas y planos, y de planos entre sí, así como algunas propiedades sencillas de lugares geométricos, principalmente, y como ya queda adelantado en el capítulo X, referentes al cono de revolución y a la esfera.

Los casos a que antes nos referíamos vienen especificados en el cuadro adjunto y en la figura aclaratoria 444, donde, y para evitar confusiones, llamaremos α , β , γ , a los ángulos diedros de aristas a , b y c , y las caras A , B y C , las determinadas por los lados $b-c$, $c-a$ y $a-b$, respectivamente.

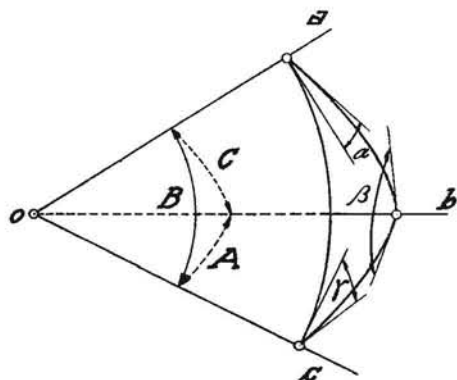


Fig. 444. — El ángulo triedro y sus elementos constitutivos.

Casos	Datos	Incógnitas
1. ^o	A, B, C	α, β, γ
2. ^o	A, B, γ	C, α, β
3. ^o	A, B, α	C, β, γ
4. ^o	A, β, γ	C, B, α
5. ^o	A, β, α	C, B, γ
6. ^o	α, β, γ	A, B, C

Primer caso: Se dan las tres caras A , B y C , y se trata de determinar los tres ángulos diedros correspondientes: α , β , γ . (Fig. 445.)

Para ello seguiremos las siguientes construcciones (Fig. 446): Sobre el plano de representación abatiremos las tres caras que se situarán tal y como aparecen en la figura; es decir, $B-A-C$. De esta suerte, la arista a opuesta a la cara A habrá sido abatida alrededor de la arista b tomada como charnela Ch ocupando la posición a_a , y de la misma forma tomando por charnela (Ch) la arista c , se tiene la abatida (a_a) .

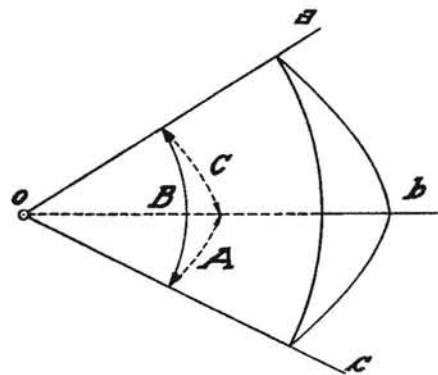


Fig. 445.—Primer caso: Se dan las tres caras $A-B-C$.

Es preciso determinar la proyección ortogonal a de esta arista, conocidos sus dos abatimientos a_a y (a_a) , motivo por el cual elegimos un punto cualquiera M que ocupará las dos posiciones M_a y (M_a) sobre a_a y (a_a) , respectivamente, tomando el segmento arbitrario $O-M_a = O-(M_a)$. Como los abati-

mientos M_a y (M_a) provienen del mismo punto del espacio, y sabemos que su proyección se ha de encontrar en la perpendicular a sus charnelas respectivas, trazaremos desde dichas posiciones abatidas M_a y (M_a) las perpendiculares a Ch y (Ch) , respectivamente, que se cortarán en el punto M , proyección del punto en cuestión, que unido con O nos determina la posición de la arista a .

Conocida esta arista, ya podemos obtener los ángulos diedros correspondientes al triedro representado. Para ello, tomando como charnela Ch_1 , y siendo el plano de abatimiento el del dibujo, el punto M ocupa una posición M_{a-1} , siendo el ángulo β el medido por las rectas $M-q$ y $q-M_{a-1}$. En igual forma, y siendo la charnela Ch_2 , tendremos en el triángulo $M_{a-2}-p-M$ la medida γ del ángulo diedro correspondiente a la arista c . En cuanto al ángulo α , habremos de trazar un plano perpendicular

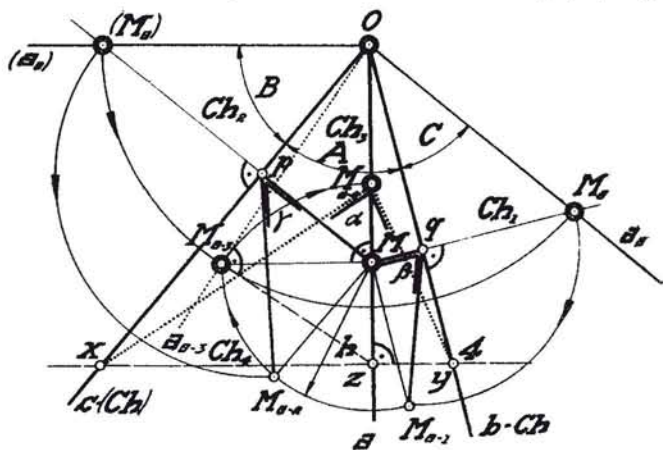


Fig. 446. — Resolución del primer caso.

al plano perpendicular a la arista a , y abatiendo el triedro, se obtendrá el ángulo α directamente en el dibujo. Para el ángulo β , se traza una perpendicular a la arista a por el punto M , y se abate el plano que contiene a a y a esta perpendicular, obteniendo así la posición M_{a-1} del punto M . El ángulo β es el ángulo formado por las rectas $M-q$ y $q-M_{a-1}$. De manera análoga se obtiene el ángulo γ para la arista c .

a la arista a , cuya traza Ch_4 será ortogonal a la arista a . (Véase fig. 447.)

Para determinar la posición de esta charnela Ch_4 con la condición de que el plano perpendicular a la arista a pase por el punto M , hemos abatido previamente, mediante la charnela Ch_3 , la arista a hasta su posición a_{a-3} , donde se encontrará el punto abatido M_{a-3} y la traza del plano perpendicular a ella será la recta $z-M_{a-3}$ perpendicular a a_{a-3} , con lo cual tenemos la verdadera distancia $\overline{M_{a-3}-z}$ que se llevará a partir de este punto y sobre la proyección a de la arista en M_{a-4} , vértice del ángulo α , cuyos lados pasan por los puntos fijos x e y .

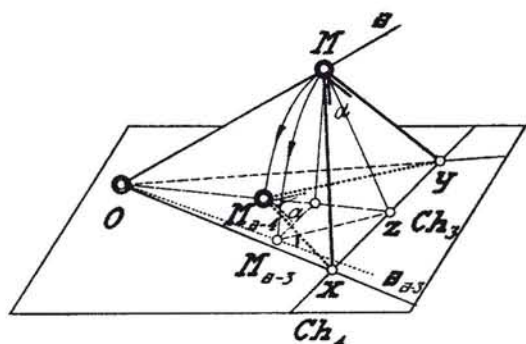


Fig. 447.—Aclaración de la figura anterior.

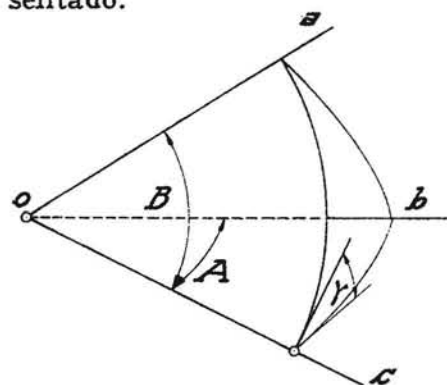


Fig. 448. — Segundo caso: Los datos son: Las caras A—B y el diedro γ comprendido.

Segundo caso: Los datos son: las caras A y B y el ángulo diedro γ comprendido entre ambas. (Fig. 448.)

Resolución. (Fig. 449.) Situaremos sobre el plano horizontal de proyección de un sistema diedro la cara A, de tal forma que la arista c sea perpendicular a la línea de tierra. De esta suerte, el ángulo γ viene proyectado en verdadera magnitud en el plano vertical medido por la traza del plano de la cara B, representada por su plano proyectante vertical.

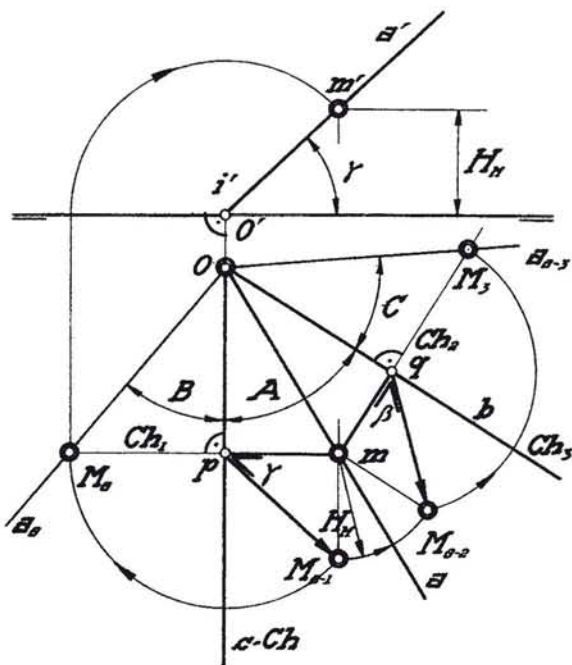


Fig. 449. — Resolución del 2.º caso.

Tomando la arista c como charnela Ch , viene abatida la arista a según a_a ; es decir, tomando la medida angular de la cara B a partir de la arista c . Tomando un punto M_a sobre dicha arista abatida, obtendremos sus proyecciones $m-m'$ deshaciendo el abatimiento, por tener que hallarse situada m' en la traza vertical del plano que la contiene, de donde se deduce su altura H_M sobre el plano de representación.

Con el conocimiento de m obtenemos la proyección horizontal de la arista a , y con ella podemos conseguir los ángulos y las caras desconocidas del triedro representado, repitiendo análogamente a lo hecho en la figura 446, las construcciones que allí se especifican.

Tercer caso: Los datos son: las caras A , B y el ángulo α opuesto a la primera. (Figura 450.)

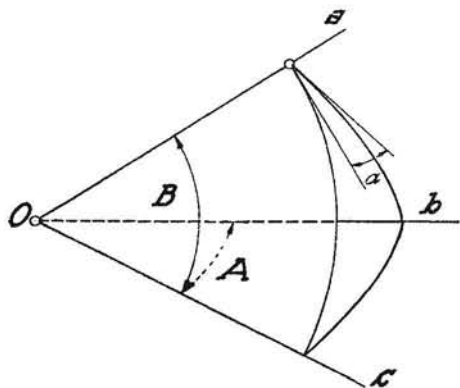


Fig. 450.—Tercer caso: Los datos son: Las caras $A=B$ y el diedro α opuesto a la cara A .

Resolución. (Figuras 451 y 452.) Se empieza por situar en un sistema diédrico y coincidente con el plano horizontal, la cara B , de tal forma que su arista a sea perpendicular a la línea de tierra, con lo cual se puede ya trazar el plano $Q-Q'$, que forma el ángulo α con dicho plano horizontal; es decir, que sea el plano de la cara C .

Si ahora tomamos la arista c como eje de un cono de revolución cuyo ángulo en el vértice sea A , la arista b estará situada sobre un cono cuyo ángulo en el vértice valga $2A$, debiéndose hallar la posición de esta generatriz en el plano (Q) ; es decir, sobre la cara C . Para ello empezaremos por determinar el centro z del círculo directriz del cono, que será elegido arbitrariamente en un punto de c ; para determinar su radio r , abatiremos la arista b en b_a , tomando por charnela Ch la arista c . De esta suerte encontramos el punto X_a abatido, y el segmento $z-X_a$ será el radio del círculo en cuestión. Las posiciones que se trata de averiguar de la generatriz del cono situadas en el plano $Q-Q'$, se consiguen tomando como charnela Ch , la recta $z-X_a$, siendo el plano de abatimiento el horizontal, donde aparece el círculo abatido y la recta intersección I_{a-1} del plano del círculo con el $Q-Q'$.

La tal recta intersección abatida tiene común con el círculo directriz los puntos X_{a-1} e Y_{a-1} , los cuales, deshechos sus abatimientos, nos proporcionan los $X-X'$ e $Y-Y'$, o sea, las dos soluciones que nos permiten representar el triedro y, por consiguiente, determinar sus elementos en la forma ya sabida por los casos anteriores.

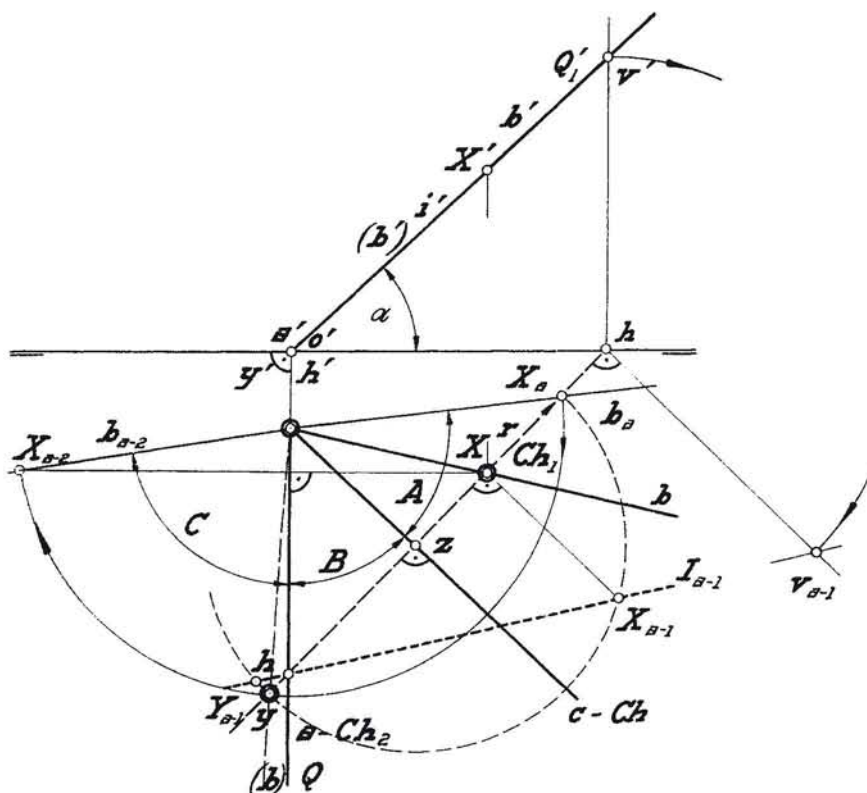


Fig. 451. — Resolución del 3.^{er} caso.

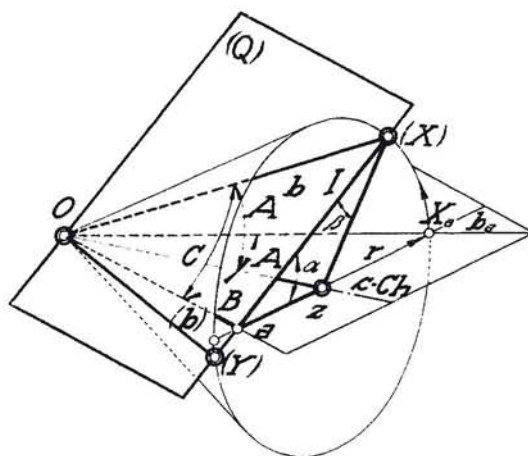


Fig. 452. — Aclaración de la figura anterior.

Cuarto caso: Los datos son: la cara A y los dos diedros β, γ . (Fig. 453.)

Resolución. (Fig. 454.) En un sistema diédrico se colocará la cara conocida A , coincidente con el plano horizontal de tal manera, que su arista c sea perpendicular a la línea de tierra, por medio de cuyo artificio conseguimos situar la cara B según el plano proyectante vertical $Q-Q'$.

Como sabemos, según se ha especificado en la figura 446, y repitiendo a la inversa la determinación del ángulo β , obtenemos en I_a el

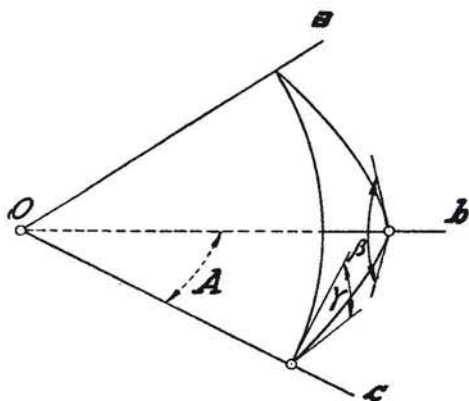


Fig. 453.—Cuarto caso: Se da una cara A y los dos diedros γ y β adyacentes.

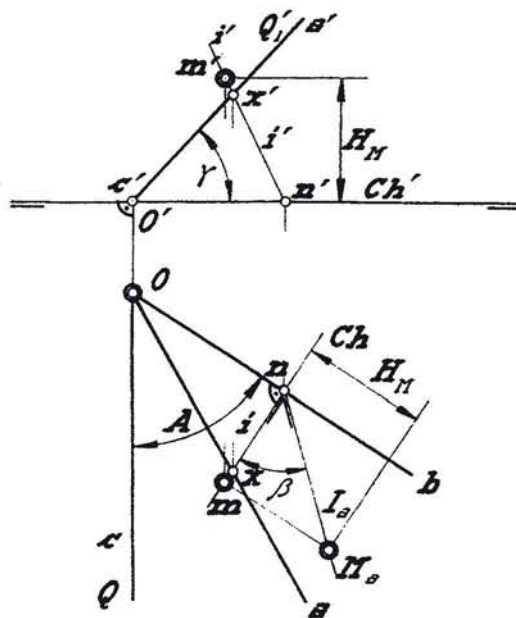


Fig. 454.—Resolución del 4.º caso.

abatimiento de la línea de máxima pendiente de la cara C , por lo que un punto cualquiera de ella: M_a , tiene como proyecciones m y m' . Siendo doble el punto $n-n'$, es decir, siendo también este punto de la intersección, ésta tiene por proyecciones $i-i'$, la cual nos determina el punto $x-x'$ común con la cara B , es decir, con el plano $Q-Q'$. Esto nos es suficiente para obtener la proyección a de la tercera arista del triedro, y con ella podremos determinar los elementos restantes del triedro representado.

Quinto caso: Los datos son: la cara A , el diedro opuesto α y un diedro adyacente β . (Fig. 455.)

Resolución. (Fig. 456.) La solución más sencilla se conseguirá

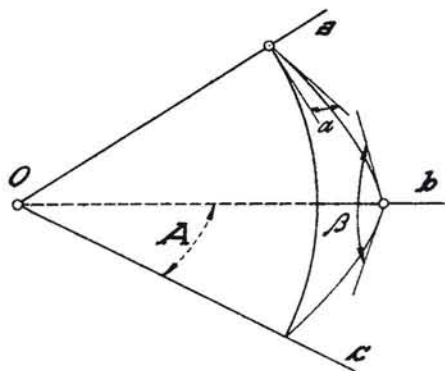


Fig. 455.—Quinto caso: Los datos son: Una cara A y dos diedros: uno adyacente β y el opuesto α .

colocando la cara A : $b—c_a$, coincidente en el plano horizontal, abatida alrededor de la arista $b—b'$ de punta con respecto al plano vertical, tomada como charnela: Ch . Podremos inmediatamente trazar el plano $Q—Q'$, que forme el ángulo β con el plano horizontal, y en él, mediante el abatimiento de un punto cualquiera M_a elegido arbitrariamente, podremos situar la cara A en su posición real sobre dicho plano $Q—Q'$, lo cual nos proporcionará c , proyección horizontal de la arista.

Bastará resolver ahora el problema especificado en la figura 457 y resuelto en relación con la figura 389, de trazar por una recta planos que formen con otro un ángulo determinado.

Para ello elegimos un punto M ; trazamos la perpendicular al plano con el cual ha de formar el ángulo α , es decir, con el plano horizontal en este caso, y tomándola por eje describiremos el cono cuyo semi-ángulo en el vértice sea el complementario de α .

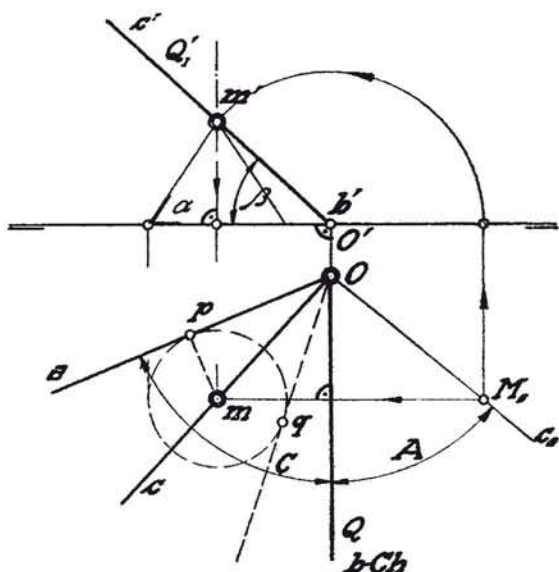


Fig. 456. — Resolución del 5.º caso.

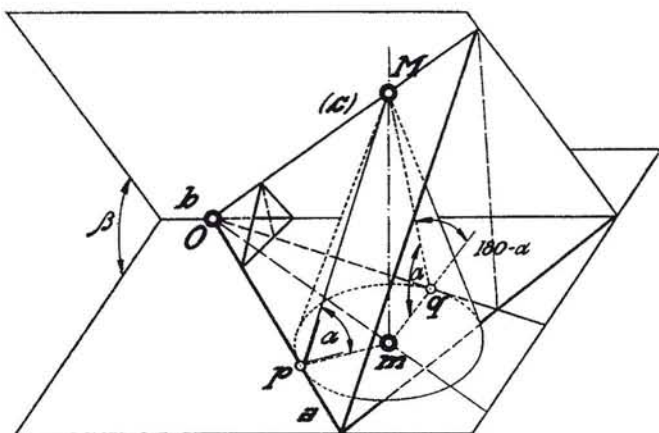


Fig. 457.—Aclaración de la figura anterior.

Fig. 458. — Sexto caso: Se dan los tres

Sexto caso: Los datos son: los tres triedros α, β, γ . (Fig. 458.)

Fig. 458. — Sexto caso: Se dan los tres diedros: α — β — γ .

Fig. 459. — Propiedad de los conos circunscritos a la misma esfera y determinación de sus planos tangentes comunes.

Figura 459. Si circunscribimos a una esfera E dos conos de revolución de vértices V_1 y V_2 a lo largo de dos paralelos p_1 y p_2 , respectivamente, que se cortan en los puntos X e Y , existirán dos planos tangentes comunes a los dos conos y a la esfera, cuyos puntos de contacto con la esfera serán los mencionados X e Y , y que tendrán por generatrices de contacto las G_x , G_y y g_x y g_y en los conos V_1 — V_2 , respectivamente.

No es preciso determinar los puntos X e Y , sino que basta, una vez determinada la directriz de centro Z del cono de vértice V_1 , situada en un plano cualquiera π (preferentemente normal a su eje $\overline{V_1-E}$), para que desde el punto W , traza de la recta $\overline{V_1-V_2}$ que une los vértices, trazar las tangentes T_x y T_y , las cuales contendrán a las generatrices mencionadas.

Observaremos que los planos así determinados cumplen con la doble condición de formar el ángulo α , por ejemplo, con el plano π , o también el ángulo $90-\alpha$ con el eje $\overline{V_1-E-Z}$, y el ángulo β con el plano que contiene p_2 , o con otro que le sea paralelo, o bien $90-\beta$, con el eje $\overline{V_2-E}$.

Esta propiedad va a ser utilizada con ventaja para resolver el caso que nos ocupa del triedro, dados sus tres ángulos diedros.

Figura 460. En un sistema diédrico tomamos el plano $Q-Q'$, como proyectante vertical y que forme el ángulo γ con el horizontal de proyección, con lo cual tenemos ya situada la arista $c-c'$ del triedro. Elijamos ahora una esfera $e-e'$ de radio cualquiera y circunscribamos un cono de vértice $v_1-v'_1$ que forme el ángulo α con el plano horizontal (en este caso se ha elegido $v_1-v'_1$, situado en el plano $Q-Q'$; pero también pudiera ser otro punto del plano). Nuevamente circunscribamos ahora a la esfera en cuestión otro cono de vértice $v_2-v'_2$ y que forme el ángulo β con el plano $Q-Q'$. De esta suerte hallaremos el punto $w-w'$, traza de la recta $\overline{v_1-v_2}$, $\overline{v'_1-v'_2}$, con el plano horizontal, desde el cual trazaremos las tangentes posibles al círculo $z-z'$, directriz del primer cono, obteniendo así la arista $b-b'$ del triedro. La recta $o-z$ será la proyección horizontal de a .

Conocidas las proyecciones de las tres aristas, podremos operar como en casos anteriores para obtener las tres caras desconocidas del triedro así representado.

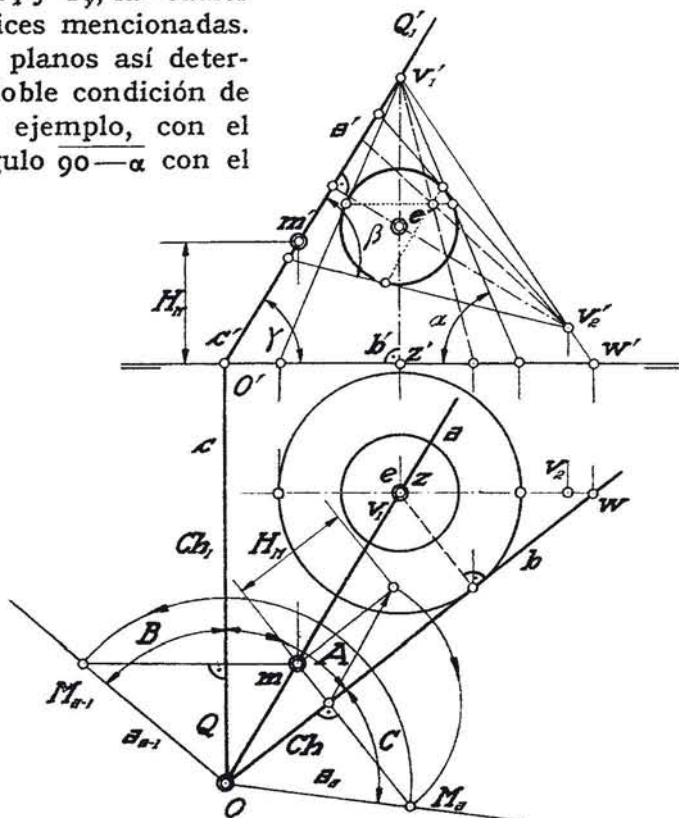


Fig. 460. — Resolución del 6.º caso.

CAPITULO XIII

CAMBIOS DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Paso del sistema acotado al diédrico. — Paso del sistema diédrico al axonométrico. — Inverso. Paso del sistema diédrico al cónico. — Inverso. — Aplicaciones.

Siendo cuatro los sistemas de representación estudiados, se podrán hacer varias combinaciones para pasar de las proyecciones de un conjunto conocidas en uno cualquiera de ellos, a las que resultaren en otro o en otros sistemas de representación. Estos pasos de un sistema a otro pueden servir de ejercicio de recapitulación, de un lado, y de otro, ser auxiliares muy valiosos para resolver problemas en sistemas de representación más sencillos. Serán de gran aplicación cuando se trate de efectuar medidas con proyecciones conocidas en los llamados sistemas representativos (axonométrico o cónico); pasaremos los datos a los sistemas de medida (acotado o diédrico), para aquí operar con más comodidad, rapidez y exactitud. Sin embargo, es de notar que el paso de un sistema a otro supone ser, a veces, un cuerpo de doctrina ya suficiente para formar un estudio especializado.

Así, por ejemplo, el paso de las proyecciones diédricas a las proyecciones cónicas, en condiciones especiales, encierra en sí todo lo referente a la llamada *Perspectiva lineal*, y lo que, con más detalle, se estudiará en el tomo III de Aplicaciones, con el nombre de "Fotogrametría", también es un paso de sistema: consistirá en obtener la proyección acotada (generalmente, de una superficie topográfica) partiendo de una proyección central obtenida desde un punto fijo o desde un punto del espacio, dando lugar así a la diferenciación entre *fotogrametría terrestre* y *fotogrametría aérea*, respectivamente.

No obstante, veremos a continuación las líneas generales que nos han de regir para efectuar los principales pasos de un sistema a otro.

Primero: *Paso del sistema acotado al sistema diédrico.* (Figuras 461 y 462.) Supongamos dada una forma plana en un plano (S) cuya línea de máxima pendiente está dada por sus puntos O y $+11$. Se trata de conseguir las proyecciones diédricas de esta forma plana, con la condición de que la traza S del plano de la figura forme un ángulo determinado α con la línea de tierra.

Se situará la proyección acotada con la condición anteriormente exi-

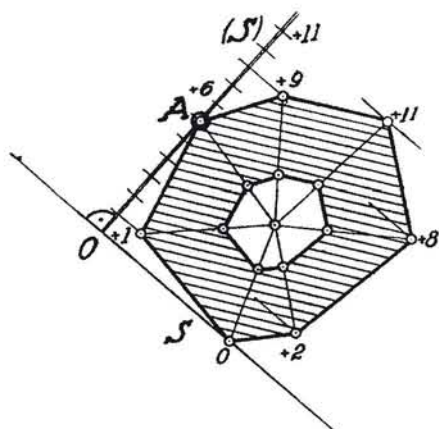


Fig. 461. — Paso del sistema acotado al diédrico de una forma plana.

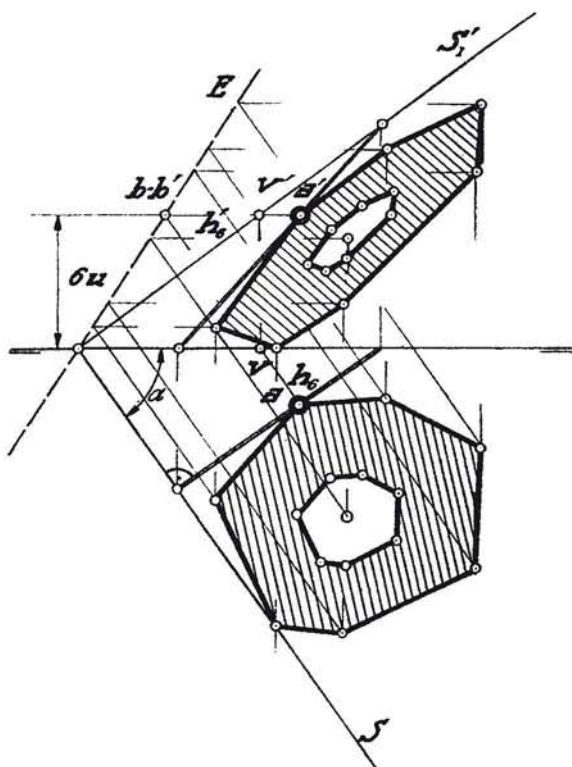


Fig. 462. — Paso del sistema acotado al diédrico: Realización.

gida, y se reproducirá exactamente para obtener la proyección horizontal. El punto a de cota $+6$ se referirá a la proyección vertical, de tal manera, que a' diste de la línea de tierra $6. u =$ seis unidades de altura, con lo cual tenemos situada la horizontal $h_a-h'_a$, que tiene por traza vertical el punto $v-v'$, por donde ha de pasar S'_1 .

Auxiliándonos de la propiedad enunciada en relación con la figura 135, y determinado el eje de afinidad E , bastará hallar la figura afín de la proyección horizontal para obtener su proyección vertical, puesto que ya conocemos dos puntos afines: $a-a'$.

Segundo: *Paso del sistema diédrico al sistema axonométrico.* (Fig. 463.) Supongamos una figura que tiene un eje de simetría: $e-e'$, situada en el plano $P-P'$.

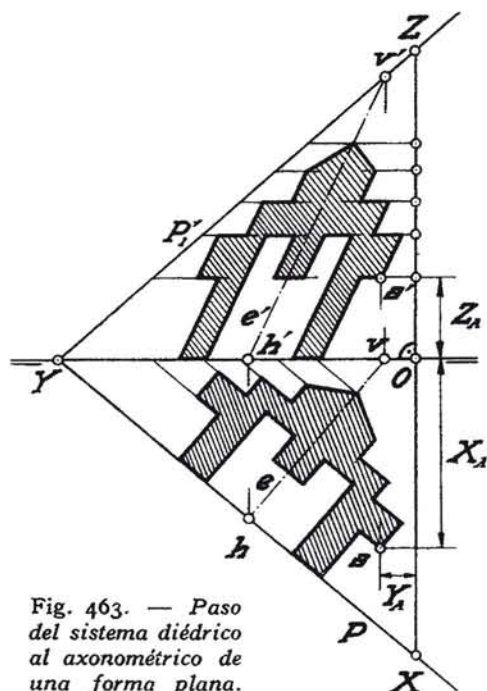


Fig. 463. — Paso del sistema diédrico al axonométrico de una forma plana.

El sistema axonométrico que vamos a elegir estará representado aquí por $O-X-O-Z-O-Y$, coincidiendo este último eje $O-Y$ con la línea de tierra.

La manera de conseguir las proyecciones axonométricas de un punto $a-a'$ se logrará midiendo previamente sus coordenadas X_A, Y_A y Z_A que, al utilizar la cuarta proporcional que

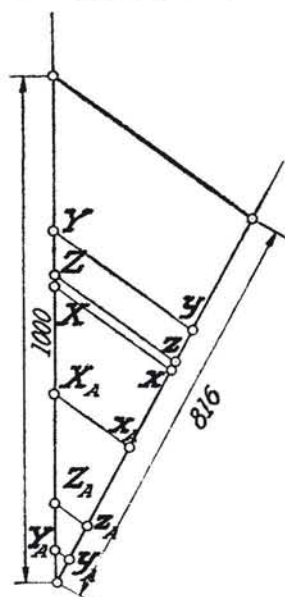


Fig. 464. — Paso del sistema diédrico al axonométrico; Reducción de coordenadas.

se detalla en la figura 464, y con el coeficiente de reducción 0,816, aparecen transformadas en sus verdaderas magnitudes, proyectadas en el sistema axonométrico de la figura 465.

De esta suerte se ha obtenido el punto $A-a'-a''$, es decir, teniendo en cuenta que sus coordenadas son $x_A-y_A-z_A$. Así podríamos ir llevando los distintos puntos de la figura plana; pero nos será más cómodo el situar previamente las trazas $p'-p''-p'''$ y, con ayuda de ellas, las horizontales y frontales o rectas cualesquiera que integran el conjunto.

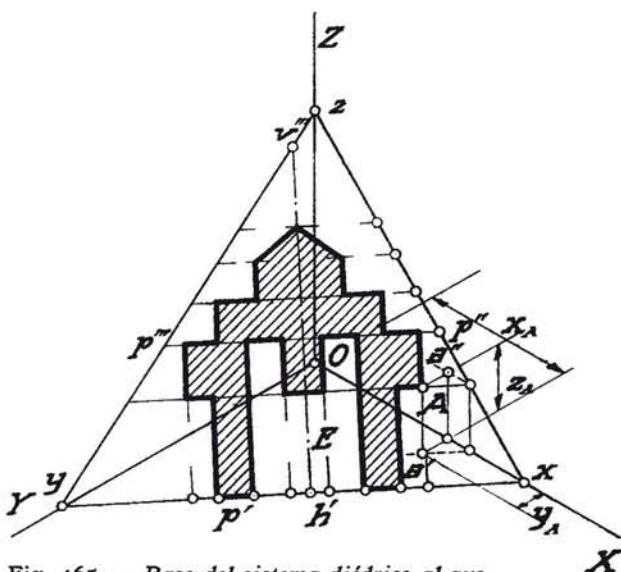


Fig. 465. — Paso del sistema diédrico al axonométrico de una forma plana: Realización.

Tercero: *Paso del sistema axonométrico al diédrico.* (Fig. 466.) Supongamos que en el sistema axonométrico existe un plano de trazas $p'-p''-p'''$, limitadas por una recta $R-r''-r'$ paralela a la cara $Z-O-Y$. Vamos a obtener las proyecciones de esta forma plana en un sistema diédrico cuya línea de tierra coincide con el eje $O-X$. Para ello situaremos previamente las trazas $P-P'$ del plano, análogas

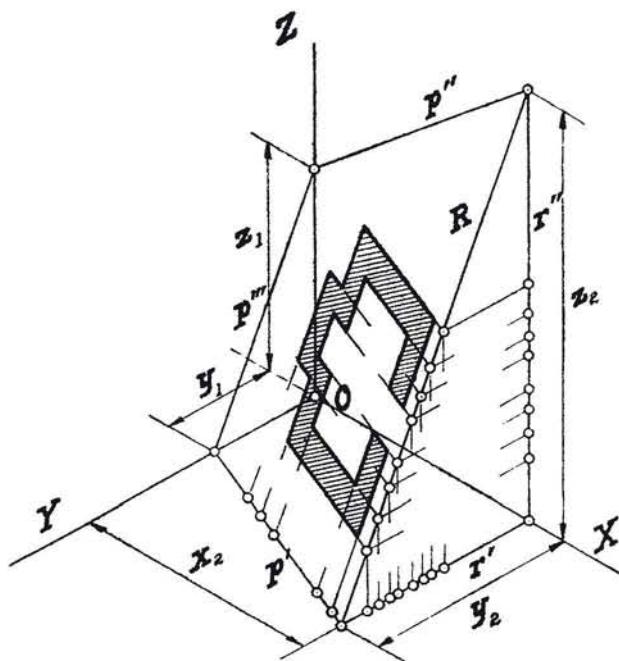


Fig. 466. — Paso del sistema axonométrico al diédrico de una forma plana.

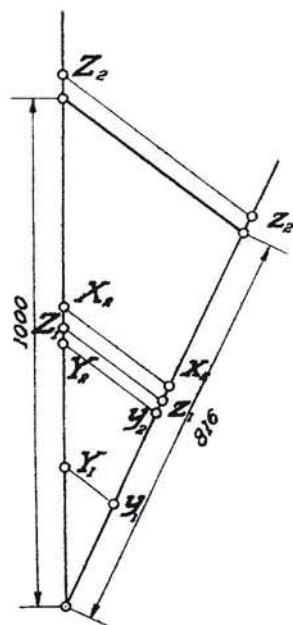


Fig. 467. — Paso del sistema axonométrico al diédrico: Reducción de coordenadas.

a las p' y p'' , respectivamente, partiendo de las coordenadas y_1-y_2 y $x_2-y_2-z_2$ modificadas en el coeficiente 0,816, como aparece en la figura 467, o sea transformándolas en las Y_1-Z_1 y $X_2-Y_2-Z_2$ (figura 468), apareciendo al mismo tiempo las proyecciones de la recta de perfil $r-r'$ correspondiente a la recta R .

Sobre esta recta de perfil se llevan los puntos de partida de horizontales y frontales, en la misma forma en que hemos operado con las coordenadas anteriores, y sus respectivas intersecciones nos proporcionarán los puntos del conjunto que viene rayado en la figura de referencia.

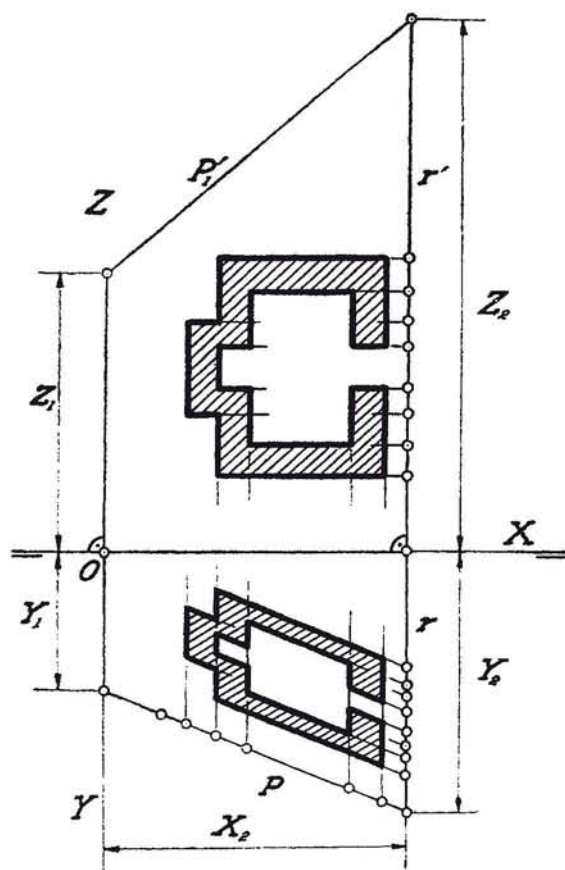


Fig. 468. — Paso del sistema axonométrico al diédrico de una forma plana: Realización.

Cuarto: *Paso del sistema diédrico al sistema cónico.* (Figuras 469 y 470.) En el plano $P-P'$, existe una figura $a-b-c-d, a'-b'-c'-d'$; se trata de conseguir la proyección cónica de esta forma plana en un sistema en que el plano vertical de proyección es el plano π , o plano del cuadro, y el centro de proyección, el punto $O-O'$. Para ello bastará recordar la forma por la que se obtiene la proyección cónica de

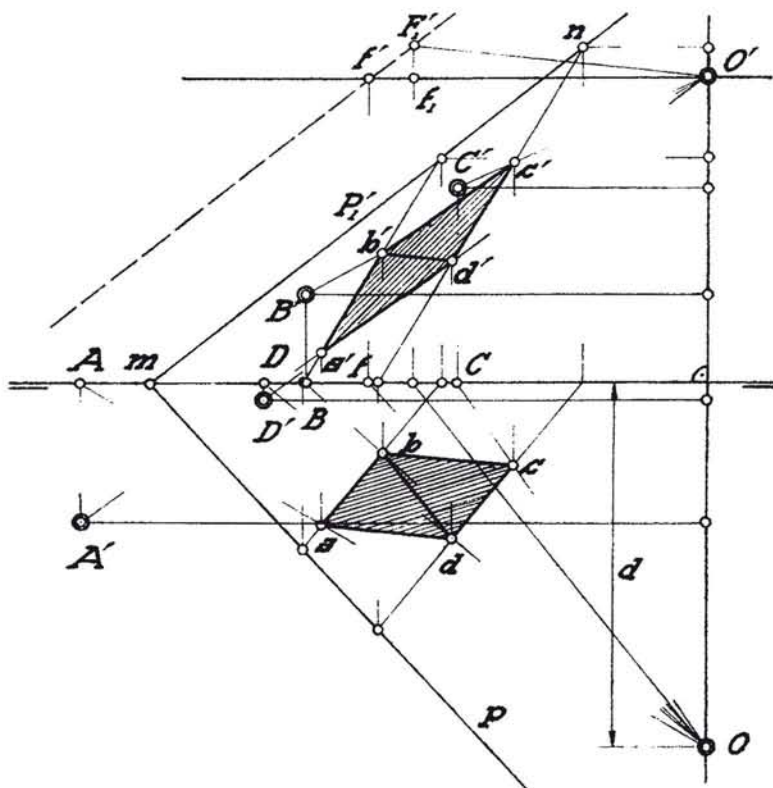


Fig. 469. — Paso del sistema diédrico al cónico de una forma plana: El centro de proyección y la figura no están separados por el plano del cuadro.

un conjunto, y que consiste en ir determinando los distintos puntos de intersección de los rayos proyectantes con el plano del cuadro. Siendo éste el vertical de proyección se reducirá, por tanto, a hallar las trazas verticales de los rayos $o-a-o'-a'$, $o-b-o'-b'$, etcétera, que nos proporcionan los puntos $A-A', B-B', C-C', D-D'$, los cuales habremos de llevar al plano del dibujo re-

presentado en la figura 470. En él aparece el sistema cónico integrado por la línea de tierra LT , la línea de horizonte LH y el punto principal P , siendo D el punto de distancia, tomando el segmento d que separa el plano vertical de la proyección horizontal O del centro de proyección.

Estableciendo ahora un sistema de ejes coordenados integrados por la línea de tierra y la traza del plano principal tomaremos distancias y alturas de los puntos $A'-B'-C'-D'$ que se situarán debidamente según $A-B-C-D$ en el plano de proyección.

También en este plano de representación figura la traza P del plano

y la recta límite L_p . Como debe suceder, P es la recta P'_1 , traza vertical del plano dado, que se ha situado valiéndonos de dos de sus puntos: $m-n$.

La traza horizontal p del plano fuga en el punto f obtenido directamente en el sistema diédrico de la figura 469. Mediante el trazado de las horizontales correspondientes y de sus proyecciones, lograremos la proyección horizontal

$a-b-c-d$

de la forma

representada

en el sistema

cónico.

Como comprobación,

se verá que

las rectas paralelas de la

figura 469

tienen en la

figura 470 el

mismo punto

de fuga situado

sobre la recta límite

L_p .

Si tenemos

a la vista

la figura

469, nos damos

cuenta de que por

estar comprendida

la figura entre el

plano del cuadro y el

punto de vista,

nos resulta una

proyección horizontal

situada por debajo de la

línea de tierra, lo cual se

procurará evitar a fin de

conseguir un conjunto

más armonioso; esto se

logra situando los

elementos componentes

del sistema cónico en una

posición relativa análoga a la

que tenemos costumbre de

manejar, y es: situando

el plano del cuadro entre la

forma proyectada y el punto

de vista. Esto aparece en

las figuras 471 y 472,

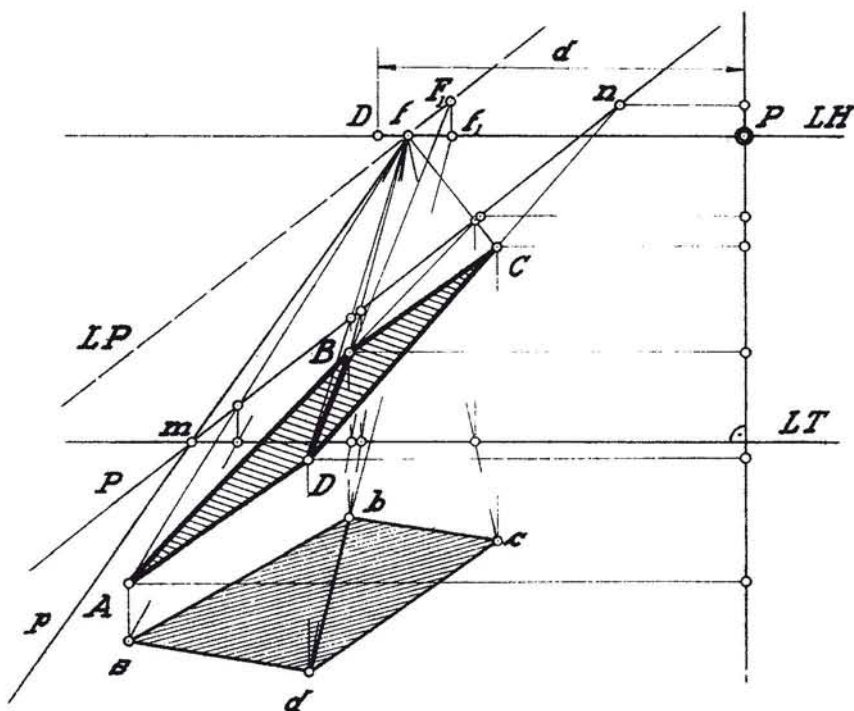


Fig. 470.—Paso del sistema diédrico al cónico de una forma plana: Realización.

distintos puntos, es decir, las $A-A'$, $B-B'$, etc., así como los puntos de fuga que aparecen en la figura 471, para luego, mediante el mismo artificio allí expuesto, obtener la proyección directa en la figura 472:

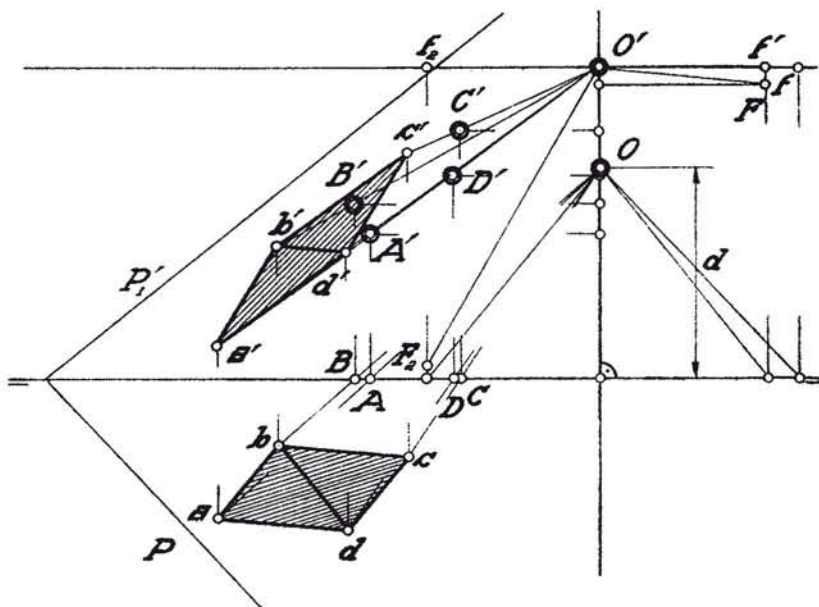


Fig. 471. — Paso del sistema diédrico al cónico de una forma plana. El plano del cuadro separa la figura a representar de su centro de proyección.

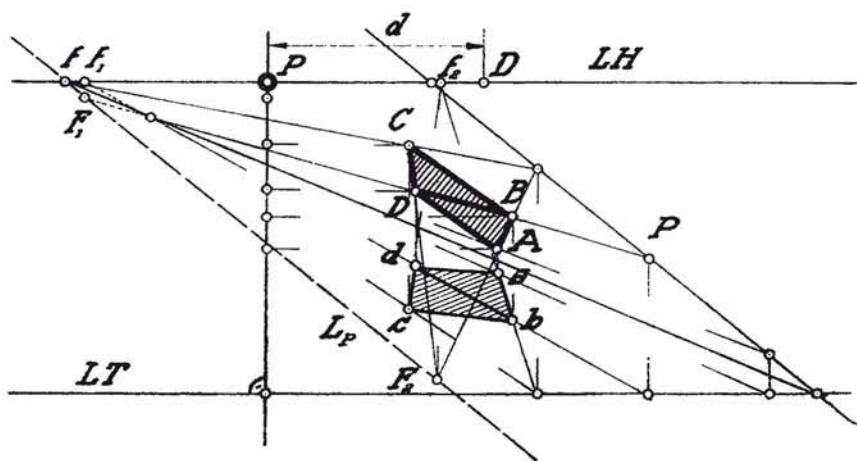


Fig. 472. — Paso del sistema diédrico al cónico de una forma plana: Realización.

$A-B-C-D$, donde se habrá de tener especial cuidado en el sentido en que se han de llevar las distancias al plano principal. Para ello se recomienda que el observador se sitúe en el punto O , proyección horizontal del centro de proyección de la figura 471, a fin de tomar a su

derecha o a su izquierda las distancias que allí aparecen. De esta suerte conseguiremos la traza P del plano y su recta límite, donde se comprobará que las paralelas fugan en el mismo punto y se podrá hallar con

toda facilidad mediante horizontales del plano en cuestión la proyección horizontal $a-b-c-d$ de la forma proyectada.

Sucede con frecuencia, y este es el caso general, que el plano del cuadro no coincida con el vertical de proyección, no obstante ser vertical; y tal aparece en las figuras 473 y 474. La forma está contenida en el plano $P-P'$, y el plano del cuadro es el $\pi-\pi'$, siendo $O-O'$ el centro de proyección cuyo punto principal $P-P'$ se obtiene inmediatamente al proyectarlo ortogonalmente sobre $\pi-\pi'$.

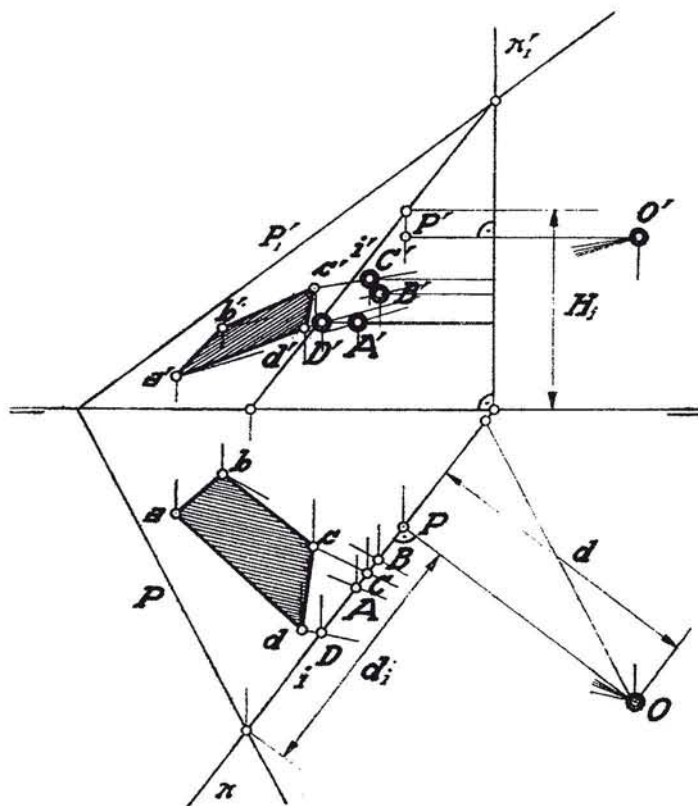


Fig. 473.—Paso del sistema diédrico al cónico: Caso general.

en la figura 473, obtenemos sus intersecciones $A-A'$, $B-B'$, $C-C'$, $D-D'$, que vamos a llevar en el sistema cónico de la figura 474. Ante todo, la traza del plano P con el plano del cuadro es la recta $i-i'$, que llevaremos utilizando los segmentos d_i y H_i en el sistema de coordenadas (fig. 474) que ya hemos empleado, consiguiéndose así la traza P del plano, y con las mismas construcciones que ya conocemos conseguiremos la proyección del conjunto $A-B-C-D$, $a-b-c-d$.

Trazados los distintos rayos proyectantes

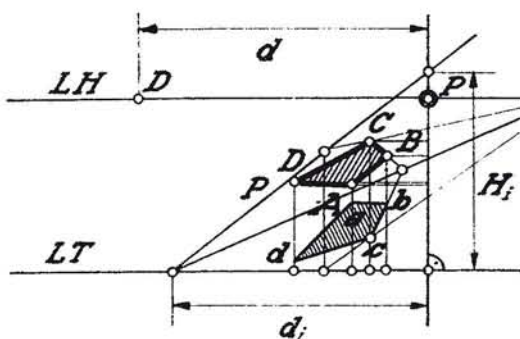


Fig. 474.—Paso del sistema diédrico al cónico: Realización del caso general.

Quinto: *Paso de un sistema cónico al sistema diédrico.* (Figuras 475 y 476.) Supongamos un sistema cónico integrado por la línea de horizonte LH , la línea de tierra LT , el punto principal P y el punto de distancia D , donde se halla representado un plano $S-L_S$, que contiene una forma $A-B-C-D-E$, $a-b-c-d-e$.

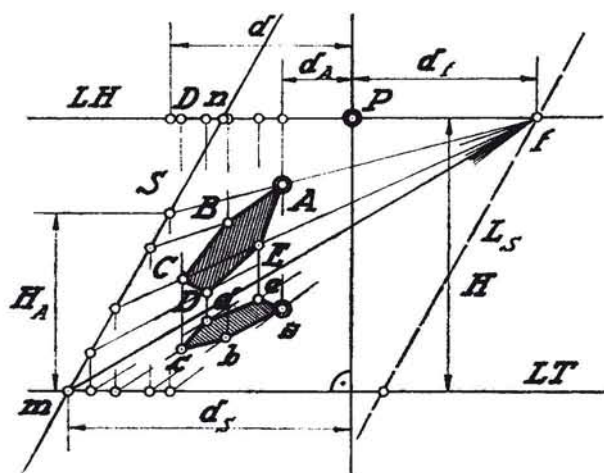


Fig. 475.—Paso del sistema cónico al diédrico.

Se trata de conseguir las proyecciones diédricas de este conjunto en un sistema donde el plano del cuadro, siendo vertical, forma un ángulo α con el de proyección.

Empezaremos por situar en la figura 476 la traza horizontal π , de tal manera, que forme el ángulo α con la línea de tierra, y a partir de un punto cualquiera sobre ella elegido, P , y con una distancia d , situaremos el punto proyección horizontal del centro O , que se llevará en O' y a la altura H que media entre la línea de horizonte y la línea de tierra.

Las trazas del plano $S-S'$, se llevarán con toda comodidad, haciendo

intervenir los segmentos d_s y d_f , pues d_f nos sitúa el punto de fuga $F—f$ de las horizontales del plano, por lo que, desde el punto m , bastará trazar S paralela a $O—f$.

La traza S del plano de la figura 475 tiene por proyecciones en la 476 $s—s'$, lograda mediante sus dos puntos $m—m'$ y $n—n'$; en esta misma

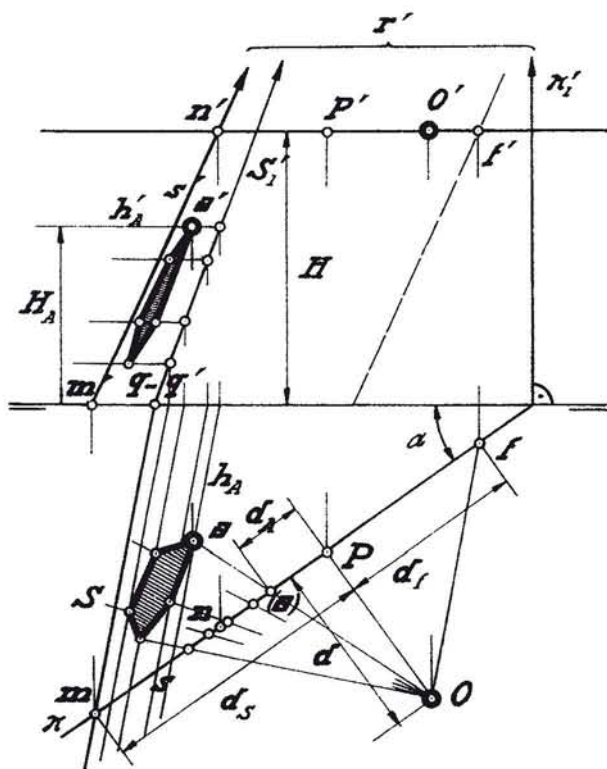


Fig. 476.—Paso del sistema cónico al diédrico: Realización.

figura la traza S' , pasará por el punto $q—q'$ de la línea de tierra y será convergente en r' con s' y con π'_1 . Con el conocimiento de esta última traza podemos situar un punto cualquiera tal que el $a—a'$, de la siguiente forma:

Se traza la horizontal de altura H_A (fig. 475) y el rayo proyector $O—a$; utilizando su distancia d_A al plano principal obtiéndose así el punto $a—a'$; llevaremos de la misma forma todos los que nos interesen.

The diagram shows a three-rod mechanism with dimensions and forces. Key points and dimensions include:

- O' and O : Points on the vertical axis.
- H : Vertical distance from the base to the level of O .
- E' : Point on the vertical axis above O .
- B'_1 and B'_2 : Points on a horizontal line at distance d from the base.
- X_A , $X_{A'}$, X_B : Horizontal distances from the vertical axis to points A , A' , and B respectively.
- Z_A : Vertical distance from the base to the level of B'_1 and B'_2 .
- Y_A , $Y_{A'}$, Y_B : Horizontal distances from the vertical axis to points A , A' , and B respectively.
- E : Point at the bottom right, connected to B_1 and B_2 by a curved line.

plano del cuadro. Para ello habremos de necesitar las coordenadas $X_A—Y_A—Z_A$ del punto, así como las del eje: X_E e Y_E . Mediante un giro normal, por ser de punta el eje con respecto al plano horizontal, obtendremos en la figura 478 su nueva posición en $a_1—a'_1$, a la cual van a corresponder las coordenadas $X_{A-1}—Y_{A-1}$ y la misma Z_A , que volveremos a pasar a la figura 477 en la forma conocida, resultando esta construcción más sencilla y más exacta, sobre todo cuando se trata de obtener un conjunto de puntos en la forma que se especifica.

Trazar los planos bisectores de un diedro representado en el sistema diédrico formado por planos paralelos a un eje. Sean $p'-p''-p'''$ y $q'-q''-q'''$ los planos que forman el diedro en cuestión, paralelos al eje $O-Z$.

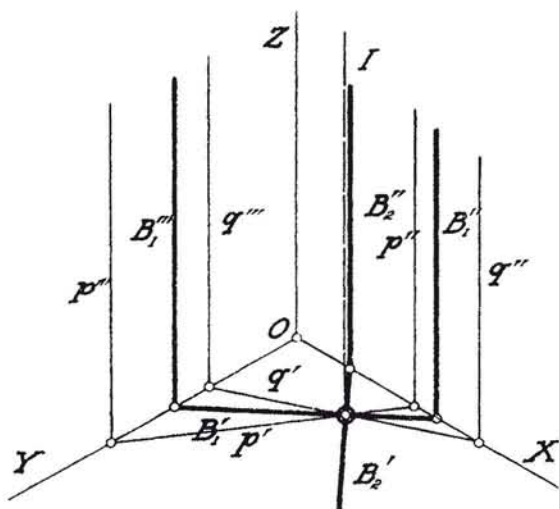


Fig. 479.—Aplicación del paso de un sistema a otro: Bisectores de un diedro en el sistema axonométrico, utilizando el diédrico.

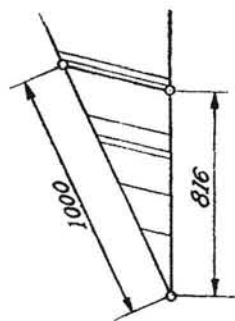


Fig. 480.—Aplicación del paso de un sistema a otro: Bisectores de un diedro en el sistema axonométrico, utilizando el diédrico.

tierra coincide con el eje $O-X$, y obtenemos así los planos $P-P_1$ y $Q-Q_1$, que por ser perpendiculares al plano horizontal de proyección (por tener su arista $i-i'$ de punta) nos dan inmediatamente la medida de su ángulo α , del cual trazaremos las bisectrices B_1 y B_2 , trazas horizontales en este sistema de los planos bisectores pedidos, los cuales interceptan en los ejes $O-X$ y $O-Y$ los segmentos que se llevarán en el sistema primitivo, donde aparecen las soluciones apetecidas: $B'_1-B''_1-B'''_1$ y $B'_2-B''_2$.

Figura 479. Mediante la reducción que se detalla en la figura 480 pasamos el conjunto a un sistema diédrico (fig. 481) en que la línea de

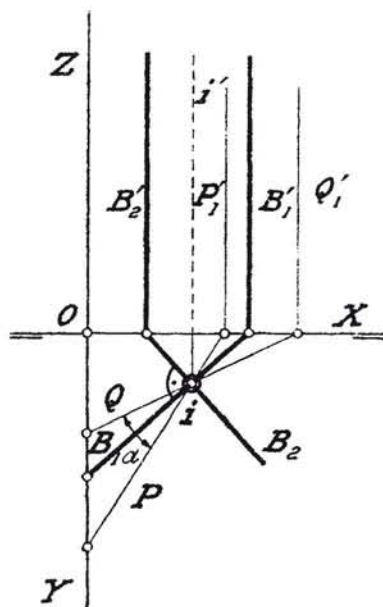


Fig. 481.—Aplicación del paso de un sistema a otro: Bisectores de un diedro en el sistema axonométrico, utilizando el diédrico.

FIN DEL TOMO I

INDICE

	Págs.		Págs.
DEDICATORIA.	5	Alfabeto de la recta.	83
GRATITUD.	9	Representación del plano.	89
INTRODUCCION.	11	Proyecciones de una forma plana. . . .	98
SUMARIO.	15		
Capítulo I.—RELACIONES HOMOLOGICAS Y PROYECTIVAS		Capítulo V. — SISTEMA AXONOMETRICO ISOMETRICO	
Homología plana. - Definición.	18	Alfabeto del punto.	101
Determinación del sistema de homología.	21	Representación de la recta.	103
Propiedades fundamentales.	22	Alfabeto de la recta.	104
Transformación homológica de la circunferencia.	23	Representación del plano.	105
Resumen.	27	Alfabeto del plano.	106
Las cónicas como homólogas de la circunferencia.	27	Proyecciones de una forma plana. . . .	111
Proyectividad.	45		
Capítulo II. — PRELIMINARES		Capítulo VI. — SISTEMA CONICO	
La Geometría Descriptiva como ciencia de la representación.	53	Alfabeto del punto.	113
Sistema acotado.	56	Observaciones importantes.	115
Sistema diédrico o de Monge.	56	Representación de la recta.	116
Sistema axonométrico.	58	Alfabeto de la recta.	117
Sistema cónico.	59	Observaciones.	123
Resumen.	62	Representación del plano.	124
Capítulo III. — SISTEMA ACOTADO		Alfabeto del plano.	128
Alfabeto del punto.	67	Proyección de una forma plana.	132
Representación de la recta.	68		
Alfabeto de la recta.	69	Capítulo VII. — INTERSECCION DE PLANOS Y DE RECTAS Y PLANOS	
Representación del plano.	70	Procedimiento general.	135
Alfabeto del plano.	71	Sistema acotado.	135
Capítulo IV. — SISTEMA DIEDRICO		Sistema diédrico.	136
Alfabeto del punto.	75	Sistema axonométrico.	137
Representación de la recta.	80	Sistema cónico.	137
		Determinación de las aristas de vertientes de tejados, utilizando el sistema acotado.	138
		Casos particulares de intersección de planos en el sistema diédrico.	142
		Casos particulares de intersección de planos en el sistema axonométrico.	150

	Págs.
Casos particulares de intersecciones de planos en el sistema cónico.	155
Intersección de una recta cualquiera con un plano.	158
Recta que corta a otras tres.	163
Recta que corte a otras dos y sea paralela a una tercera.	167

Capítulo VIII. — POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

Paralelismo.	169
Rectas paralelas.	169
Planos paralelos entre sí.	172
Rectas paralelas a un plano.	175
Perpendicularidad.	177
Plano perpendicular a otro.	185
Recta perpendicular a otra.	185
Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.	185

Capítulo IX. — DISTANCIAS

Medición de un segmento rectilíneo proyectado ortogonalmente sobre un plano.	187
Distancia de un punto al plano.	194
Distancia de un punto a una recta.	196
Distancia entre rectas paralelas.	199
Distancia entre dos planos paralelos.	201
Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan.	203

Capítulo X. — ABATIMIENTOS

Abatimiento de un punto.	207
Resolución en el sistema acotado.	208
Abatimiento de un punto en el sistema diédrico.	209
Abatimiento de un punto en el sistema axonométrico.	210
Abatimiento de un punto en el sistema cónico.	212
Abatimiento de una recta.	213
Abatimiento de una recta en el sistema acotado.	214
Abatimiento de la recta en el sistema diédrico.	214
Abatimiento de la recta en el sistema axonométrico y determinación de un segmento dado.	216
Abatimiento de la recta en el sistema cónico y determinación de un segmento de magnitud dada.	217
Abatimiento de una forma plana.	218
Abatimiento de una figura plana en el sistema acotado.	219

Abatimiento de una forma plana en el sistema diédrico.	219
Abatimiento de una forma plana en el sistema axonométrico.	220
Abatimiento de una forma plana en el sistema cónico.	220
Problema inverso.	222
Obtención de las proyecciones de una forma plana conocida.	222
Sistema diédrico.	223
Proyección de un círculo en el sistema axonométrico.	224
Proyección de la circunferencia en el sistema cónico.	225
Aplicación del abatimiento a la medición de ángulos.	226
Ángulos de dos rectas.	226
Ángulo de dos rectas en el sistema acotado.	227
Ángulo de dos rectas en el sistema diédrico, y su bisectriz.	227
Ángulo y bisectriz de dos rectas en el sistema axonométrico.	228
Ángulo de dos rectas y bisectriz en el sistema cónico.	228
Ángulo de una recta con un plano.	229
Resolución en el sistema diédrico.	229
Bisectriz del ángulo de una recta con un plano en el sistema cónico.	231
Ángulo de dos planos y plano bisector de ambos.	232
Resolución en el sistema diédrico.	232
Ángulo que forma un plano cualquiera con los de proyección en el sistema diédrico.	233
Resolución en el sistema diédrico.	234
Trazar planos y rectas que cumplan la condición de formar ángulos determinados con rectas y con planos dados.	235

Capítulo XI. — CAMBIOS Y GIROS

Cambio paralelo del plano de representación en el sistema acotado.	243
Cambio oblicuo del plano de proyección en el sistema acotado.	245
Cambio de los planos de proyección en el sistema diédrico.	248
Cambio del plano vertical de proyección.	249
Cambio del plano horizontal de proyección.	250
Mediante un cambio se consigue que una recta cualquiera sea paralela a un plano de proyección.	252
Por un cambio se consigue que una recta paralela a un plano de proyección se transforme en recta de punta.	254

	Págs.		Págs.
Hallar un nuevo sistema diédrico mediante dos cambios de plano, de tal forma que una recta cualquiera $r-r'$ se coloque de punta.	254	Aplicaciones de los giros.	277
Por un cambio de plano de proyección se sitúa uno cualquiera como proyectante.	255	Traslaciones.	281
Por un cambio de plano se coloca un plano proyectante paralelo al de proyección.	256		
Aplicaciones de los cambios de planos de proyección.	258	Capítulo XII. — TRIEDROS	
Cambio de los elementos de proyección en el sistema cónico.	261	Primer caso: Se dan las tres caras A , B y C	284
El plano del cuadro se desplaza paralelamente a sí mismo.	261	Segundo caso: Los datos son: las caras A y B y el ángulo diedro γ comprendido entre ambas.	285
El centro se aleja en dirección ortogonal al plano del cuadro.	263	Tercer caso: Los datos son: las caras A , B y el ángulo α opuesto a la primera.	286
El centro de proyección del sistema cónico se desplaza paralelamente al plano del cuadro.	265	Cuarto caso: Los datos son: la cara A y los dos diedros adyacentes β , γ	288
El plano geometral se desplaza paralelamente a sí mismo.	267	Quinto caso: Los datos son: la cara A , el diedro opuesto α y un diedro adyacente β	289
Giros.	268	Sexto caso: Los datos son: los tres triedros α , β , γ	290
Giro de un punto.	268	Capítulo XIII. — CAMBIOS DE SISTEMAS DE REPRESENTACION	
Mediante un giro, una recta paralela a un plano de proyección se coloca de punta.	271	Primero: Paso del sistema acotado al sistema diédrico.	294
Mediante un giro alrededor de un eje de punta, se consigue que un plano cualquiera se transforme en un plano proyectante.	272	Segundo: Paso del sistema diédrico al sistema axonométrico.	295
Mediante un giro, un plano proyectante se coloca paralelo a uno de proyección.	272	Tercero: Paso del sistema axonométrico al diédrico.	296
Mediante dos giros, una recta cualquiera se coloca de punta con respecto a un plano de proyección.	273	Cuarto: Paso del sistema diédrico al sistema cónico.	298
Mediante dos giros, un plano cualquiera se coloca paralelo a un plano de proyección.	273	Quinto: Paso de un sistema cónico al sistema diédrico.	302
Giros alrededor de un eje oblicuo.	274	Aplicaciones: Dado un punto $A-a$ en el sistema cónico y un eje vertical $E-e$, obtener la posición de este punto en este sistema después de un giro de 90° alrededor del eje en cuestión.	304
Giro elíptico.	276	Trazar los planos bisectores de un diedro representado en el sistema diédrico formado por planos paralelos a un eje.	305

